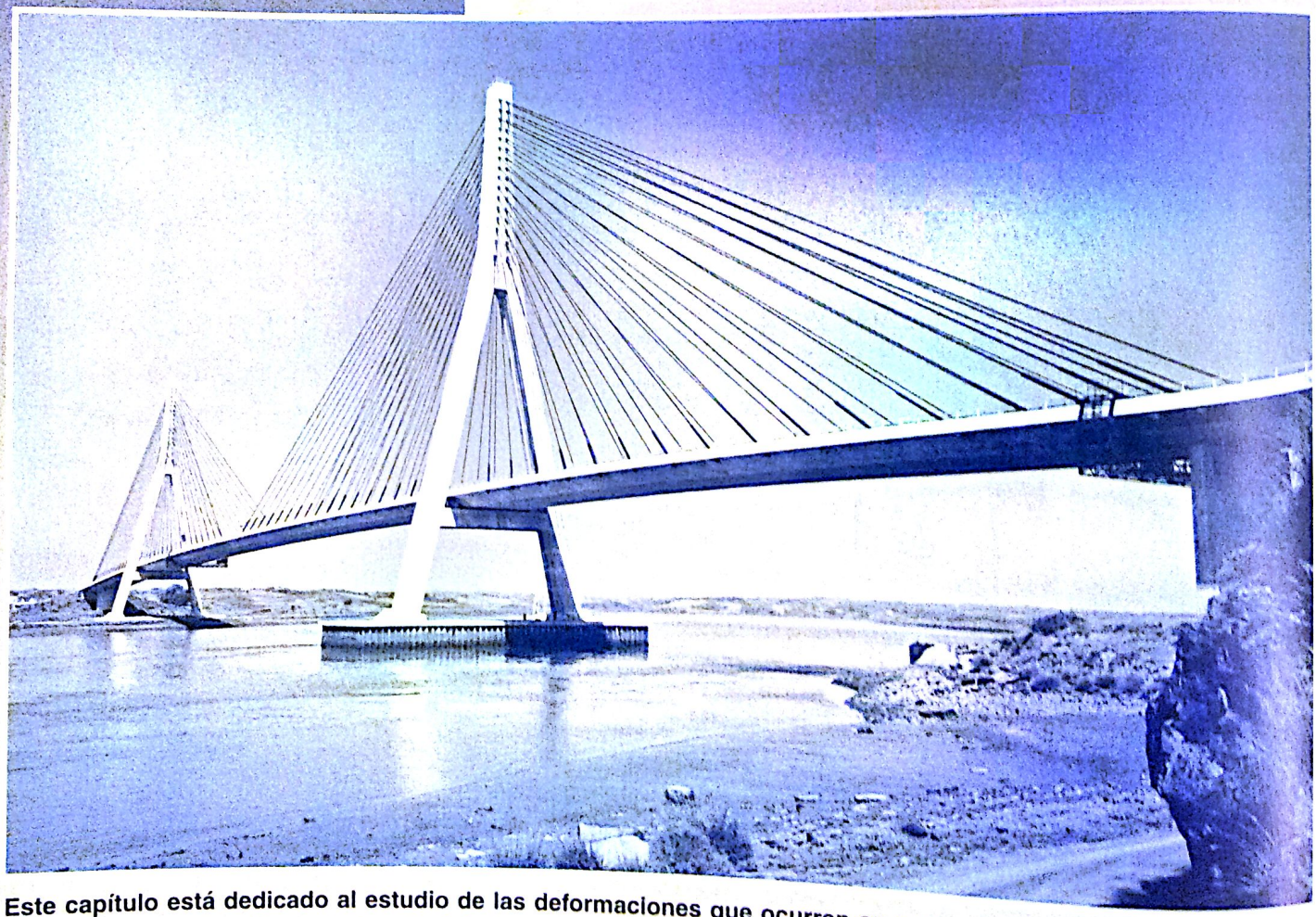
CAPÍTULO

2 Esfuerzo y deformación. Carga axial



Este capítulo está dedicado al estudio de las deformaciones que ocurren en componentes estructurales sujetos a carga axial. El cambio en la longitud de los tensores diagonales se consideró de manera cuidadosa en el diseño de este puente estabilizado por cables.

2.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 1 se analizaron los esfuerzos que las cargas aplicadas a una estructura o máquina crean en varios elementos y conexiones. Además se aprendió a diseñar elementos y conexiones sencillos para que no fallen en condiciones específicas de carga. Otro aspecto importante del análisis y diseño de estructuras se relaciona con las *deformaciones* causadas por las cargas que se aplican a la estructura. Obviamente, es importante evitar deformaciones tan grandes que impidan a la estructura cumplir el propósito para el que está destinada. Pero el análisis de las deformaciones también puede ayudar en la determinación de esfuerzos. De hecho, no siempre es posible determinar las fuerzas en los elementos de una estructura aplicando únicamente los principios de la estática. Esto se debe a que la estática se basa en la suposición de estructuras rígidas e indeformables. Considerando las estructuras de ingeniería como *deformables* y analizando las deformaciones en sus diversos elementos, será posible calcular las fuerzas que son *estáticamente indeterminadas*, es decir, indeterminadas dentro del punto de vista de la estática. También, como ya se indicó en la sección 1.5, la distribución de esfuerzos en un elemento dado es estáticamente indeterminada, aun cuando la fuerza en tal elemento se conozca. Para hallar la distribución real de esfuerzos dentro de un elemento es necesario, por lo tanto, analizar las deformaciones que tienen lugar en dicho elemento. En este capítulo se considerarán las deformaciones de un elemento estructural como una varilla, barra o placa sometida a *carga axial*.

Primero, se definirá la *deformación normal* ϵ en un elemento, también conocida como deformación unitaria normal, como la *deformación del elemento por unidad de longitud*. Al elaborar la gráfica del esfuerzo σ contra la deformación ϵ a medida que la carga aplicada al elemento se incrementa, se obtendrá el *diagrama esfuerzo-deformación* para el material utilizado. De dicho diagrama será posible determinar algunas propiedades importantes del material, tales como su *módulo de elasticidad* y si el material es dúctil o frágil (véanse secciones 2.2 a 2.5). También se verá en la sección 2.5 que, en tanto que el comportamiento de la mayoría de los materiales es independiente de la dirección en la que se aplique la carga, la respuesta de los materiales compuestos reforzados con fibras depende de la dirección de la carga.

Del diagrama esfuerzo-deformación, también se determinará si las deformaciones en la muestra desaparecerán después de que la carga haya sido retirada, en cuyo caso se dice que el material se comporta *elásticamente*, o si resultará en una *deformación plástica* o *deformación permanente* (véase sección 2.6).

En la sección 2.7 se estudiará al fenómeno de *fatiga*, que causa que los componentes estructurales o de máquinas fallen después de un número muy grande de cargas repetidas, aunque los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico.

La primera parte del capítulo termina en la sección 2.8, dedicada al cálculo de la deformación en varios tipos de elementos en diferentes condiciones de carga axial.

En las secciones 2.9 y 2.10 se considerarán *problemas estáticamente indeterminados*, es decir, problemas en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse únicamente por la estática. Las ecuaciones de equilibrio que se deducen del diagrama de cuerpo libre del elemento bajo consideración deben ser complementadas por relaciones que involucran deformaciones; estas relaciones serán obtenidas de la geometría del problema.

En las secciones 2.11 a 2.15 se introducirán las constantes adicionales asociadas con materiales isotrópicos, es decir, materiales cuyas características mecánicas son independientes de la dirección. Incluyen la *relación de Poisson*, que relaciona las deformaciones lateral y axial, el *módulo volumétrico* de elasticidad, que caracteriza el cambio en el volumen de un material bajo presión hidrostática y el *módulo de rigidez*, que relaciona las componentes del esfuerzo cortante y de la deformación unitaria cortante. Por último se deducirán las relaciones de esfuerzo-deformación para un material isotrópico bajo carga multiaxial.

En la sección 2.16, las relaciones de esfuerzo-deformación que involucran varios valores distintos del módulo de elasticidad, de la relación de Poisson y del módulo de rigidez serán deducidos para materiales compuestos reforzados con fibras bajo carga multiaxial. A pesar de que estos materiales no son isotrópicos, desarrollan comúnmente propiedades especiales, conocidas como propiedades *ortotrópicas*, que facilitan su estudio.

Por lo analizado hasta ahora, se supondrá que los esfuerzos se encuentran distribuidos de manera uniforme en cualquier sección transversal dada y también se supondrá que permanecen dentro del rango elástico. La validez de la primera suposición se estudiará en la sección 2.17, mientras que las *concentraciones de esfuerzos* cerca de agujeros y filetes circulares en barras planas se considerarán en la sección 2.18. Las secciones 2.19 y 2.20 abordarán el análisis de esfuerzos y deformaciones en elementos hechos de materiales dúctiles cuando se sobrepasa del punto de cedencia del material. Como se verá, en tales condiciones de carga resultan *deformaciones plásticas* permanentes y *esfuerzos residuales*.

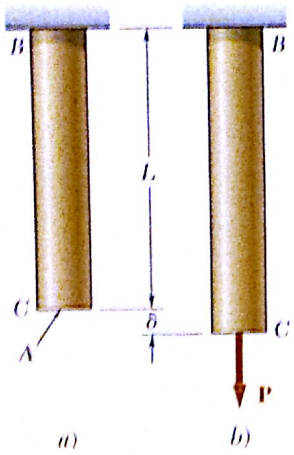


Figura 2.1

2.2 DEFORMACIÓN NORMAL BAJO CARGA AXIAL

Considere una varilla BC, de longitud L y con un área uniforme de sección transversal A que está suspendida en B (figura 2.1*a*). Si se aplica una carga **P** al extremo C, la varilla se alargará (figura 2.1*b*). Al graficar la magnitud P de la carga contra la deformación total δ (letra griega delta), se obtiene un determinado diagrama de carga-deformación (figura 2.2). Si bien este diagrama contiene información útil para el análisis de la varilla considerada, no puede emplearse directamente para predecir la deformación de una varilla del mismo material pero de diferentes dimensiones. De hecho, se observa que, si una deformación δ se produce en la varilla BC por una carga **P**, se requiere una carga $2\mathbf{P}$ para causar la misma deformación en una varilla $B'C'$ de la

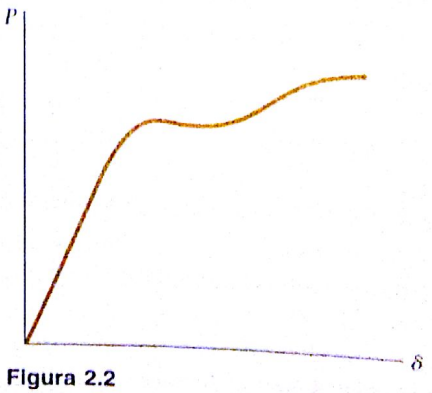


Figura 2.2

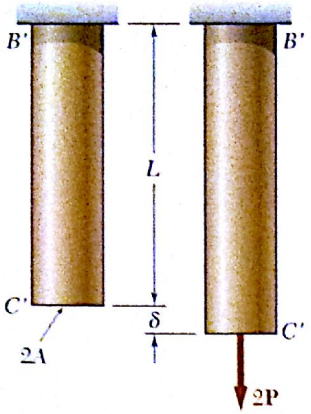


Figura 2.3

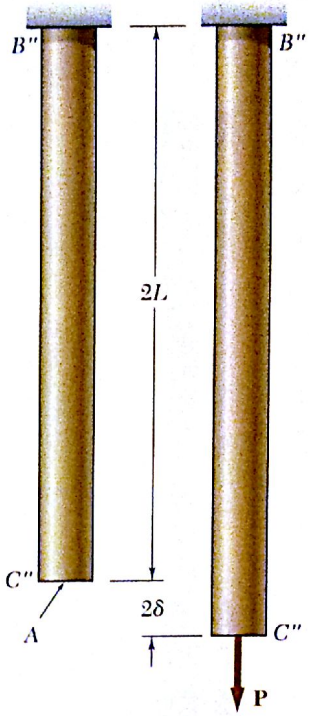


Figura 2.4

misma longitud L, pero con un área de sección transversal $2A$ (figura 2.3). Se nota que, en ambos casos, el valor del esfuerzo es el mismo: $\sigma = p/A$. Por otra parte, una carga **P** aplicada a la varilla $B''C''$, con la misma área de sección transversal A, pero de longitud $2L$, produce una deformación 2δ en dicha varilla (figura 2.4), es decir, una deformación que es el doble de la producida en la varilla BC. No obstante, en ambos casos la razón de la deformación por la longitud de la varilla es la misma e igual a δ/L. Esta observación nos lleva a introducir el concepto de *deformación unitaria*: definimos la *deformación unitaria normal* en una varilla bajo carga axial como la *deformación por unidad de longitud* de dicha varilla. Si la deformación unitaria normal se representa por ϵ (épsilon), se tiene

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

Elaborando la gráfica el esfuerzo $\sigma = P/A$ en contraste con la deformación $\epsilon = \delta/L$, se obtiene una curva que es característica de las propiedades del material y no depende de las dimensiones de la muestra particular utilizada. Esta curva se denomina *diagrama de esfuerzo-deformación*, que se explicará con más detalle en la sección 2.3.

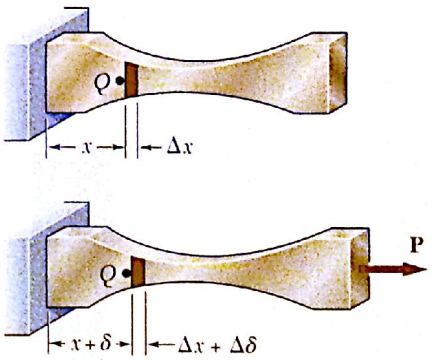


Figura 2.5

Puesto que la varilla BC considerada en el anterior análisis tenía una sección transversal uniforme con área A, puede suponerse que el esfuerzo normal σ tiene un valor constante P/A a lo largo de toda la varilla. Así, fue apropiado definir la deformación unitaria ϵ como la razón de la deformación total δ sobre el largo total L de la varilla. En el caso de un elemento de área variable de sección transversal A, sin embargo, el esfuerzo normal $\sigma = P/A$ varía a lo largo del elemento, y es necesario definir la deformación unitaria en un punto dado Q considerando un pequeño elemento con longitud sin deformar Δx (figura 2.5). Si $\Delta\delta$ es la deformación del elemento bajo la carga dada, la *deformación normal en el punto Q* se define como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Como la deformación y la longitud se expresan en las mismas unidades, la deformación normal ϵ obtenida de dividir δ entre L (o $d\delta$ entre dx) es una *cantidad adimensional*. Por lo tanto, se obtiene el mismo valor numérico de la deformación normal en un elemento dado, sea que se empleen unidades métricas SI o unidades americanas. Considere, por ejemplo, una barra con una longitud $L = 0.600$ m y sección transversal uniforme, que sufre una deformación total $\delta = 150 \times 10^{-6}$ m. La deformación unitaria correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150 \times 10^{-6}\ \text{m}}{0.600\ \text{m}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{m/m} = 250 \times 10^{-6}$$

Advierta que la deformación total podría haberse expresado en micrómetros: $\delta = 150\ \mu$m. Se habría escrito entonces:

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{150\ \mu\text{m}}{0.600\ \text{m}} = 250\ \mu\text{m/m} = 250\ \mu$$

y leído la respuesta como "250 micros". Si se emplean unidades del sistema americano, la longitud y la deformación de la misma barra son, respectivamente, $L = 23.6$ in. y $\delta = 5.91 \times 10^{-3}$ in. La deformación correspondiente es

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{5.91 \times 10^{-3}\ \text{in.}}{23.6\ \text{in.}} = 250 \times 10^{-6}\ \text{in./in.}$$

que es el mismo valor que se encontró al utilizar las unidades del SI. Se acostumbra, sin embargo, cuando las longitudes y las deformaciones se expresan en pulgadas o micropulgadas (μin.), conservar las unidades originales en la expresión obtenida para la deformación. Así, en el ejemplo, la deformación se registraría como $\epsilon = 250 \times 10^{-6}$ in./in. o, de forma alterna, $\epsilon = 250$ μin./in.

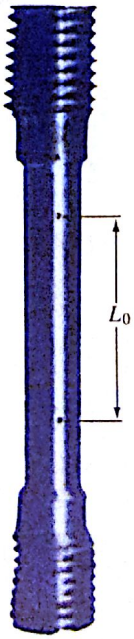


Figura 2.6 Probeta típica para ensayo o prueba de tensión.

2.3 DIAGRAMA ESFUERZO-DEFORMACIÓN

En la sección 2.2 se vio que el diagrama que representa la relación entre el esfuerzo y la deformación en un material dado es una característica importante del material. Para obtener el diagrama de esfuerzo-deformación de un material, comúnmente se lleva a cabo un *ensayo o prueba de tensión* sobre una probeta del material. El tipo de probeta más utilizado se muestra en la figura 2.6. El área de la sección transversal de la sección cilíndrica central de la probeta se ha determinado exactamente y se han hecho dos marcas de calibración en dicha porción a una separación de L_0. La distancia L_0 se conoce como la *longitud* base de la probeta.

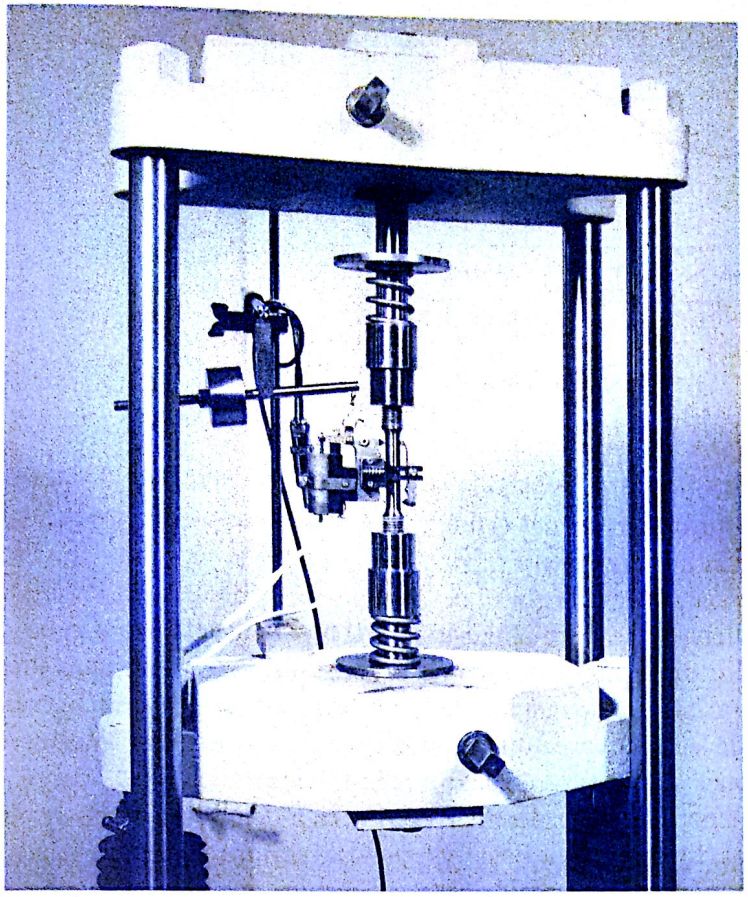


Figura 2.7 Esta máquina se emplea para realizar pruebas a tensión en probeta, como las que se explican en este capítulo.

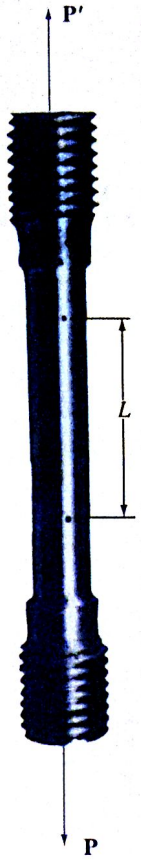


Figura 2.8 Probeta de prueba con carga de tensión.

La probeta se coloca en la máquina de ensayo (figura 2.7), que se usa para aplicar una carga centrada **P**. Al aumentar la carga **P**, también se incrementa la distancia L entre las dos marcas base de la probeta (figura 2.8). La distancia L se mide con un indicador de carátula, y el alargamiento $\delta = L - L_0$ se registra para cada valor de P. Con frecuencia un segundo indicador de carátula se emplea de manera simultánea para medir y registrar el cambio de diámetro del espécimen. Para cada par de lecturas P y δ, el esfuerzo σ se calcula dividiendo P entre el área original de la sección transversal A_0 del espécimen, y la deformación unitaria ϵ dividiendo el alargamiento δ entre la distancia original L_0 entre las dos marcas base de la probeta. Puede ahora obtenerse el diagrama de esfuerzo-deformación graficando ϵ como la abscisa y σ como la ordenada.

Los diagramas esfuerzo-deformación de los materiales varían en forma considerable, por lo que diferentes ensayos de tensión llevados a cabo sobre el mismo material pueden arrojar diferentes resultados, dependiendo de la temperatura de la probeta y de la velocidad de aplicación de la carga. Sin embargo, es posible distinguir algunas características comunes entre los diagramas esfuerzo-deformación de distintos grupos de materiales, y dividir los materiales en dos amplias categorías con base en estas características. Habrá así materiales *dúctiles* y materiales *frágiles*.

Los materiales dúctiles, como el acero estructural, así como muchas aleaciones de otros metales, se caracterizan por su capacidad de *fluir* a temperaturas normales. Al someterse la probeta a una carga que aumenta, su longitud se incrementa primero linealmente con la carga y a una tasa muy lenta. Así, la porción inicial del diagrama esfuerzo-deformación es una línea recta

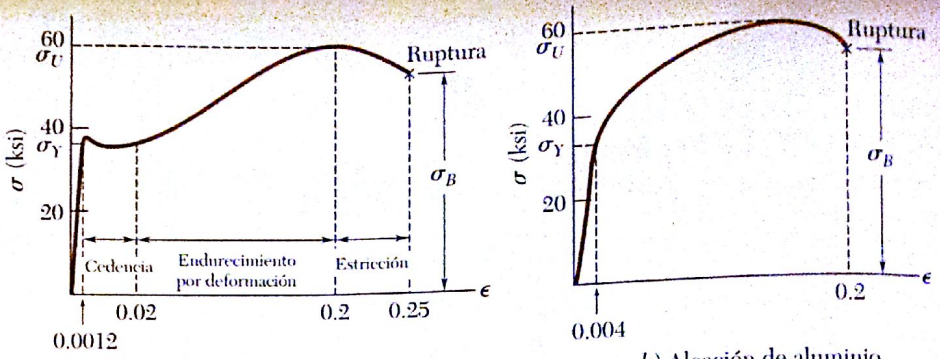


Figura 2.9 Diagramas esfuerzo-deformación de dos materiales dúctiles típicos.

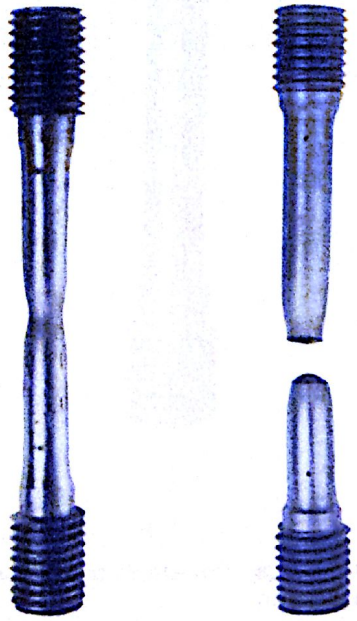


Figura 2.10 Probeta después del ensayo de un material dúctil.

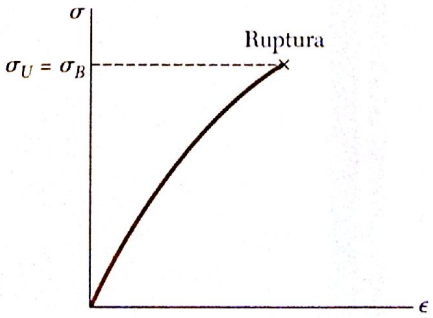


Figura 2.11 Diagrama esfuerzo-deformación para un material frágil típico.

con una pendiente pronunciada (figura 2.9). No obstante, después de alcanzar un valor crítico σ_Y del esfuerzo, la probeta experimenta una gran deformación con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada. Esta deformación es causada por el deslizamiento del material a lo largo de superficies oblicuas y se debe sobre todo a esfuerzos cortantes. Como puede notarse en los diagramas esfuerzo-deformación de dos materiales dúctiles típicos (figura 2.9), la elongación de la probeta después de que ha comenzado a fluir puede ser 200 veces más grande que su deformación anterior a la fluencia. Después de haber alcanzado un cierto valor máximo de carga, el diámetro de una porción del espécimen comienza a disminuir, debido a la inestabilidad local (figura 2.10*a*). Este fenómeno se conoce como *estricción*. Después de que comienza la estricción, son suficientes cargas algo menores para lograr que la probeta se alargue aún más, hasta que finalmente se fractura (figura 2.10*b*). Puede verse que la fractura ocurre a lo largo de una superficie con forma de cono que forma un ángulo de, aproximadamente, 45° con la superficie original de la probeta. Esto indica que el cortante es el principal responsable de la falla de los materiales dúctiles, y confirma el hecho de que, bajo una carga axial, los esfuerzos cortantes son máximos en las superficies que forman un ángulo de 45° con la carga (véase sección 1.11). El esfuerzo σ_Y en el que comienza la fluencia se llama la *resistencia o punto de fluencia o cedencia* del material, el esfuerzo σ_U que corresponde a la máxima carga aplicada al material se conoce como la *resistencia última* y el esfuerzo σ_B correspondiente a la fractura se denomina *resistencia a la fractura*.

Los materiales frágiles como el hierro colado, el vidrio y la piedra se caracterizan por el fenómeno de que la fractura ocurre sin un cambio notable previo de la tasa de alargamiento (figura 2.11). Así, para los materiales frágiles, no hay diferencia entre la resistencia última y la resistencia a la fractura. Además, la deformación unitaria al momento de la fractura es mucho menor para los materiales frágiles que para los materiales dúctiles. En la figura 2.12 se observa que no hay estricción alguna en el espécimen en el caso de un material frágil, y que la fractura ocurre a lo largo de una superficie perpendicular a la carga. Se concluye, a partir de esta observación, que los esfuerzos normales son los principales responsables de la falla de los materiales frágiles.†

† Se ha supuesto que los ensayos de tensión descritos en esta sección se efectuaron en temperaturas normales. Sin embargo, un material que es dúctil a temperaturas normales puede mostrar las características de un material frágil a muy bajas temperaturas, mientras que un material normalmente frágil puede comportarse de manera dúctil a muy altas temperaturas. A temperaturas distintas de la normal, por lo tanto, hay que referirse a *un material en estado dúctil* o a *un material en estado frágil*, más que a un material dúctil o frágil.

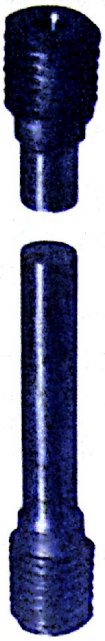


Figura 2.12 Probeta después de un ensayo de un material frágil.

Los diagramas esfuerzo-deformación de la figura 2.9 muestran que el acero estructural y el aluminio tienen distintas características de cedencia aunque ambos son dúctiles. En el caso del acero estructural (figura 2.9*a*), el esfuerzo permanece constante a lo largo de un gran rango de valores de deformación después de la aparición de la fluencia. Posteriormente debe incrementarse el esfuerzo para seguir alargando la probeta, hasta que se alcance el valor máximo σ_U. Esto se debe a la propiedad del material conocida como endurecimiento por deformación. La resistencia a la cedencia del acero estructural puede determinarse durante el ensayo de tensión vigilando la carga que se muestra en el indicador de la máquina de ensayo. Después de aumentar en forma estable, se observa que la carga decae en forma súbita a un valor ligeramente menor, que se mantiene por un cierto periodo mientras que la probeta continúa alargándose. En un ensayo realizado con cuidado, puede distinguirse entre el *punto superior de cedencia*, que corresponde a la carga alcanzada justo antes de que comience la fluencia, y el *punto inferior de cedencia*, que corresponde a la carga requerida para mantener la fluencia. Debido a que el punto superior de cedencia es transitorio, debe emplearse el punto inferior de cedencia para determinar la resistencia a la cedencia del material.

En el caso del aluminio (figura 2.9*b*) y de muchos otros materiales dúctiles, el inicio de la cedencia no se caracteriza por una porción horizontal de la curva de esfuerzo-deformación. En estos casos, el esfuerzo continúa aumentando, aunque no linealmente, hasta alcanzar la resistencia última. Comienza, entonces, la estricción, que conduce inevitablemente a la ruptura. Para tales materiales, la resistencia a la cedencia σ_Y se define por el método de desviación. La resistencia a la cedencia con una desviación del 0.2%, por ejemplo, se obtiene dibujando por el punto del eje horizontal de abscisa $\epsilon = 0.2\%$ (o $\epsilon = 0.002$), una línea paralela a la porción inicial en línea recta del diagrama de esfuerzo-deformación (figura 2.13). El esfuerzo σ_Y obtenido de esta manera corresponde al punto Y y se define como la resistencia a la cedencia a una desviación del 0.2%.

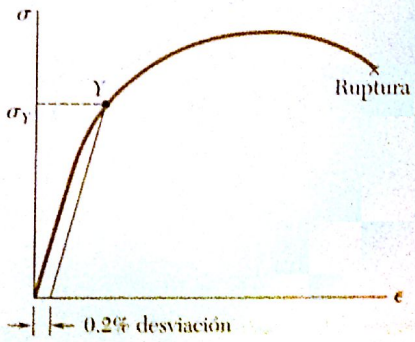


Figura 2.13 Determinación de la resistencia de cedencia por el método de desviación.

Una medida estándar de la ductilidad de un material es su *porcentaje de alargamiento*, que se define como

$$\text{Porcentaje de alargamiento} = 100\frac{L_B - L_0}{L_0}$$

donde L_0 y L_B denotan, respectivamente, la longitud inicial de la probeta para ensayo de tensión y su longitud final a la ruptura. El alargamiento mínimo especificado para una longitud calibrada de 2 in. para los aceros más usados con resistencias de fluencia de hasta 50 ksi es de 21%. Se nota que esto significa que la deformación a la fractura debería ser de, por lo menos, 0.21 in./in.

Otra medida de la ductilidad que en ocasiones se emplea es el *porcentaje de reducción de área*, definido como

$$\text{Porcentaje de reducción de área} = 100\frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

donde A_0 y A_B denotan, respectivamente, el área inicial de la sección transversal de la probeta y su mínima área de sección transversal a la fractura. Para el acero estructural, es común encontrar porcentajes de reducción de área del 60 al 70%.

Hasta ahora, se han analizado sólo ensayos o pruebas de tensión. Si una probeta de material dúctil se cargara a compresión en lugar de tensión, la curva de esfuerzo-deformación que se obtendría sería esencialmente la misma a lo largo de su porción inicial en línea recta y del comienzo de la porción correspondiente a la cedencia y al endurecimiento por deformación. De relevancia particular es el hecho de que, para un acero dado, la resistencia a la fluencia es la misma tanto a tensión como a compresión. Para valores mayores de deformación, las curvas de esfuerzo-deformación a tensión y a compresión divergen, y deberá advertirse que no puede ocurrir estricción a compresión. Para la mayoría de los materiales dúctiles, se encuentra que la resistencia última a compresión es mucho mayor que la resistencia última a la tensión. Esto se debe a la presencia de fallas (por ejemplo, cavidades o grietas microscópicas) que tienden a debilitar al material a tensión, mientras que no afectan en forma significativa su resistencia a la compresión.

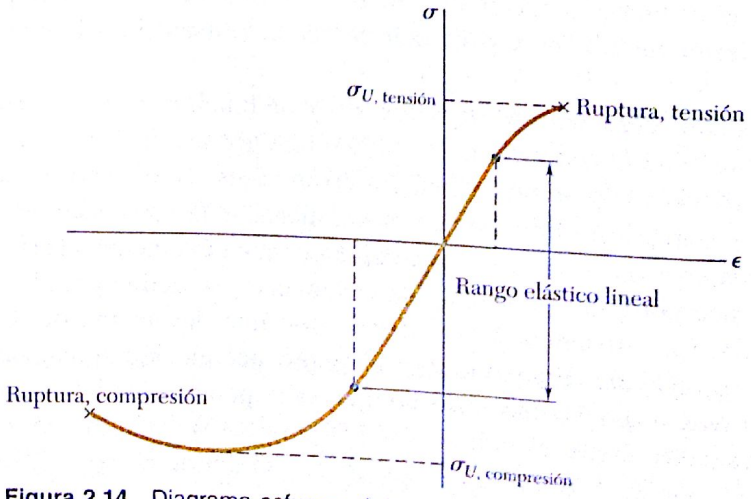


Figura 2.14 Diagrama esfuerzo-deformación para el concreto.

Un ejemplo de material frágil con diferentes propiedades a tensión y a compresión es el *concreto*, cuyo diagrama esfuerzo-deformación se muestra en la figura 2.14. En el lado de tensión del diagrama, primero se observa un rango elástico lineal en el que la deformación es proporcional al esfuerzo. Después de que se ha alcanzado el punto de cedencia, la deformación aumenta más rápidamente que el esfuerzo hasta que ocurre la fractura. El comportamiento del material bajo compresión es diferente. Primero, el rango elástico lineal es significativamente mayor. Segundo, la ruptura no ocurre cuando el esfuerzo alcanza su máximo valor. En lugar de esto, el esfuerzo decrece en magnitud mientras que la deformación plástica sigue aumentando hasta que la ruptura ocurre. Advierta que el módulo de elasticidad, representado por la pendiente de la curva de esfuerzo-deformación en su porción lineal, es la misma en tensión que en compresión. Esto es cierto para la mayoría de los materiales frágiles.

2.4 ESFUERZO Y DEFORMACIÓN VERDADEROS

Recuerde que el esfuerzo graficado en los diagramas de las figuras 2.9 y 2.11 se obtuvo al dividir la carga P entre el área de sección transversal A_0 de la probeta medida antes de que hubiera tenido lugar alguna deformación. Como el área de la sección transversal de la probeta disminuye cuando aumenta P, el esfuerzo graficado en el diagrama no representa el esfuerzo real en la probeta. La diferencia entre el *esfuerzo ingenieril* $\sigma = P/A_0$ que se calculó y el *esfuerzo real* $\sigma_t = P/A$ obtenido de la división de P entre el área de la sección transversal A de la probeta deformada se vuelve aparente en los materiales dúctiles después de que ha aparecido la cedencia. En tanto que el esfuerzo ingenieril σ, que es directamente proporcional a la carga P, disminuye con P durante la fase de estricción, el esfuerzo real σ_t, que es proporcional a P pero también inversamente proporcional a A, puede verse que sigue aumentando hasta que la fractura de la probeta ocurre.

Muchos científicos utilizan una definición de deformación diferente de la *deformación ingenieril* $\epsilon = \delta/L_0$. En lugar de emplear la deformación total δ y el valor original de la longitud calibrada L_0, utilizan todos los valores sucesivos de L que han registrado. Dividiendo cada incremento de distancia ΔL de la distancia entre las marcas de calibración entre el valor correspondiente de L, se obtiene la deformación unitaria elemental $\Delta\epsilon = \Delta L/L$. Sumando los valores sucesivos de $\Delta\epsilon$, se define la *deformación unitaria real* ϵ_t:

$$\epsilon_t = \Sigma\Delta\epsilon = \Sigma(\Delta L/L)$$

Al reemplazar la sumatoria por una integral, también puede expresarse la deformación unitaria real como:

$$\epsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_0} \tag{2.3}$$

El diagrama obtenido al graficar el esfuerzo real contra la deformación unitaria real (figura 2.15) refleja con mayor exactitud el comportamiento del material. Como se ha advertido, no hay disminución del esfuerzo real durante la fase de estricción. Además, las gráficas obtenidas de los ensayos a ten-

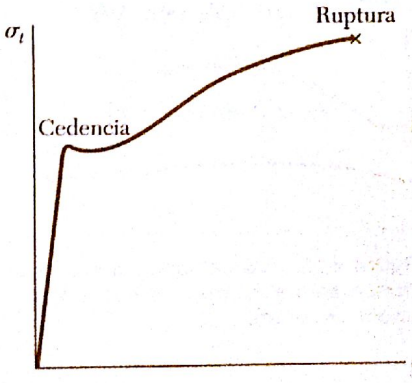


Figura 2.15 Esfuerzo real contra deformación real para un material dúctil típico.

sión y a compresión darán, en esencia, la misma gráfica cuando se utilizan el esfuerzo real y la deformación unitaria real. No ocurre lo mismo para valores grandes de la deformación unitaria cuando se grafica el esfuerzo ingenieril contra la deformación unitaria ingenieril. Sin embargo, los ingenieros, cuya responsabilidad es determinar si una carga P produce un esfuerzo aceptable y una deformación aceptable en un elemento dado, desearán utilizar un diagrama basado sobre el esfuerzo ingenieril $\sigma = P/A_0$ y sobre la deformación unitaria ingenieril $\epsilon = \delta/L_0$, ya que estas expresiones involucran datos disponibles para ellos, como el área de la sección transversal A_0 y la longitud L_0 del elemento en su estado sin deformar.

2.5 LEY DE HOOKE. MÓDULO DE ELASTICIDAD

La mayor parte de las estructuras de ingeniería se diseñan para sufrir deformaciones relativamente pequeñas, que involucran sólo la parte recta del diagrama de esfuerzo-deformación correspondiente. Para esta porción inicial del diagrama (figura 2.9), el esfuerzo σ es directamente proporcional a la deformación ϵ, y puede escribirse

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

Esta relación se conoce como *ley de Hooke*, llamada así en honor del matemático inglés Robert Hooke (1635-1703). El coeficiente E se denomina *módulo de elasticidad* del material involucrado o, también, *módulo de Young*, en honor del científico inglés Thomas Young (1773-1829). Como la deformación ϵ es una cantidad adimensional, el módulo E se expresa en las mismas unidades que el esfuerzo σ, es decir, en pascales o en uno de sus múltiplos si se emplean unidades del SI, y en psi o ksi si se emplean unidades americanas.

El máximo valor de esfuerzo para el que puede emplearse la ley de Hooke en un material dado se conoce como *límite de proporcionalidad* de ese material. En el caso de los materiales dúctiles que poseen un punto de cedencia bien definido, como en la figura 2.9*a*, el límite de proporcionalidad casi coincide con el punto de cedencia. Para otros materiales, el límite de proporcionalidad no puede definirse con tanta facilidad, ya que es difícil determinar con exactitud el valor del esfuerzo σ para el que la relación entre σ y ϵ deja de ser lineal. Pero esta dificultad misma indica que, en el caso de dichos materiales, emplear la ley de Hooke para valores apenas mayores que el límite real de proporcionalidad no conducirá a ningún error significativo.

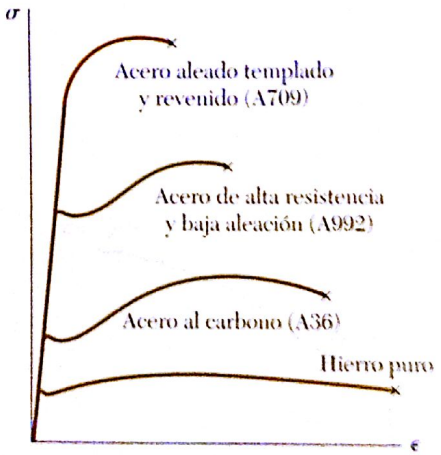


Figura 2.16 Diagramas esfuerzo-deformación para el hierro y para diversos grados de acero.

Algunas de las propiedades físicas de los metales estructurales, como resistencia, ductilidad y resistencia a la corrosión, pueden verse muy afectadas debido a causas como la aleación, el tratamiento térmico y el proceso de manufactura empleado. Por ejemplo, se observa en los diagramas de esfuerzo-deformación del hierro puro y de tres diferentes grados de acero (figura 2.16) que grandes variaciones en la resistencia a la fluencia, la resistencia última y la deformación unitaria final (ductilidad) existen entre estos cuatro metales. Todos ellos, sin embargo, poseen el mismo módulo de elasticidad: en otras palabras, su "rigidez" o capacidad para resistir una deformación dentro del rango lineal es la misma. Por lo tanto, si en una estructura dada un acero de alta resistencia sustituye a uno de menor resistencia, y si todas las dimensiones permanecen iguales, la estructura tendrá un incremento en su capacidad de carga, pero su rigidez permanecerá sin cambio.

Para cada uno de los materiales considerados hasta ahora, la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, $\sigma = E\epsilon$, es independiente de la dirección de la carga. Esto se debe a que las propiedades mecánicas de cada material, incluyendo su módulo de elasticidad E, son independientes de la dirección considerada. Se dice que tales materiales son *isotrópicos*. Los materiales cuyas propiedades dependen de la dirección considerada se conocen como *anisotrópicos*. Una clase importante de materiales anisotrópicos está formada por los *materiales compuestos reforzados con fibras*.

Estos materiales compuestos se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, conocido como *matriz*. Los materiales más empleados como fibras son el grafito, el vidrio y los polímeros, en tanto que varios tipos de resinas se emplean como matrices. La figura 2.17 muestra una capa, o *lámina*, de un material compuesto que consiste en un gran número de fibras paralelas encapsuladas en una matriz. Una carga axial aplicada a la lámina a lo largo del eje x, es decir, en la dirección paralela a las fibras, creará un esfuerzo normal σ_x en la lámina y su correspondiente deformación unitaria ϵ_x, que satisfarán la ley de Hooke al aumentarse la carga y en tanto no se alcance el límite elástico de la lámina. De manera similar, una carga axial aplicada a lo largo del eje y, esto es, en una dirección perpendicular a la lámina, creará un esfuerzo normal σ_y y una deformación unitaria normal ϵ_y que satisfacen la ley de Hooke, y una carga axial aplicada a lo largo del eje z creará un esfuerzo normal σ_z y una deformación normal ϵ_z, que nuevamente satisfarán la ley de Hooke. No obstante, los módulos de elasticidad E_x, E_y y E_z correspondientes, respectivamente, a cada una de las anteriores situaciones de carga, serán diferentes. Debido a que las fibras están paralelas al eje x, la lámina ofrecerá una resistencia mucho mayor a la carga dirigida a lo largo del eje x que a la dirigida a lo largo de los ejes y o z, y E_x será mucho mayor que E_y o que E_z.

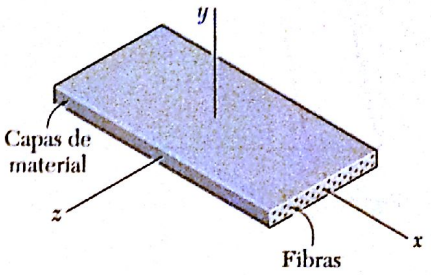


Figura 2.17 Capa de material compuesto reforzado con fibras.

Un *laminado* plano se obtiene superponiendo un número de capas o láminas. Si el laminado será sometido sólo a carga axial que cause tensión, las fibras en todas las capas deberán tener la misma orientación que la carga para obtener la máxima resistencia posible. Pero si el laminado puede estar en compresión, el material de la matriz puede no ser tan fuerte como para evitar que las fibras se tuerzan o pandeen. La estabilidad lateral del laminado puede entonces incrementarse colocando algunas de las capas de tal manera que sus fibras queden perpendiculares a la carga. También es posible colocar algunas capas para que sus fibras estén orientadas a 30°, 45° o 60° a la carga a fin de incrementar la resistencia del laminado al cortante en el plano. Los materiales compuestos reforzados con fibras serán analizados con mayor detalle en la sección 2.16, donde se considerará su comportamiento ante cargas multiaxiales.

2.6 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO CONTRA COMPORTAMIENTO PLÁSTICO DE UN MATERIAL

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando se retira la carga, se dice que el material se comporta *elásticamente*. El máximo valor de esfuerzo para el que el material se comporta elásticamente se denomina el *límite elástico* del material.

Si el material tiene un punto de cedencia bien definido como en la figura 2.9*a*, el límite elástico, el límite de proporcionalidad (véase sección 2.5) y el punto de cedencia o punto de fluencia son esencialmente los mismos.

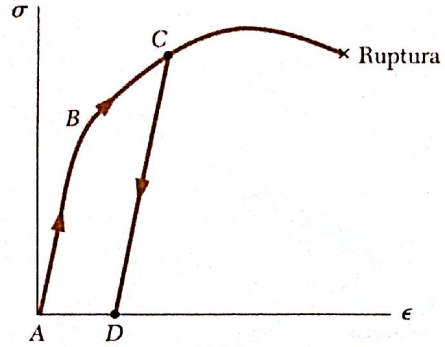


Figura 2.18

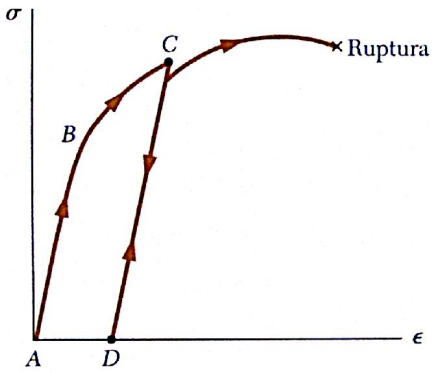


Figura 2.19

En otras palabras, el material se comporta elástica y linealmente mientras el esfuerzo se mantenga por debajo del punto de cedencia. Si se alcanza el punto de cedencia, sin embargo, ésta ocurre como se describió en la sección 2.3 y, al retirar la carga, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de manera lineal, a lo largo de una línea CD paralela a la parte recta AB de la curva de carga (figura 2.18). Si ϵ no regresa a cero después de que la carga ha sido retirada indica que ha ocurrido una *deformación permanente* o *deformación plástica* en el material. Para la mayor parte de los materiales, la deformación plástica depende no tan sólo del máximo valor alcanzado por el esfuerzo, sino también del tiempo que pasa antes de que se retire la carga. La parte dependiente del esfuerzo de la deformación plástica se denomina *deslizamiento*, y la parte dependiente del tiempo, que también depende de la temperatura, se llama *termoelasticidad*.

Cuando un material no posee un punto de cedencia bien definido, el límite elástico no puede determinarse con precisión. Sin embargo, suponer que el límite elástico es igual a la resistencia a la fluencia, como se ha definido por el método de desviación (sección 2.3), genera un pequeño error. De hecho, haciendo referencia a la figura 2.13, observamos que la línea recta usada para determinar el punto Y también representa la curva de descarga después de haber alcanzado un esfuerzo máximo σ_Y. A pesar de que el material no se comporta de una manera verdaderamente elástica, la deformación plástica resultante es tan pequeña como la desviación elegida.

Si, después de ser cargada y descargada (véase figura 2.19), la probeta se carga de nuevo, la nueva curva de carga seguirá muy de cerca la anterior curva hasta que casi alcance el punto C; entonces, se doblará a la derecha y se conectará con la porción curva del diagrama de esfuerzo-deformación original. Note que la parte recta de la nueva curva de carga es más larga que la correspondiente a la curva inicial. Así, el límite de proporcionalidad y el límite elástico han aumentado como resultado del endurecimiento por deformación ocurrido durante la anterior carga de la probeta. Sin embargo, ya que el punto de ruptura R permanece sin cambio, la ductilidad de la probeta, que ahora deberá medirse desde el punto D, ha disminuido.

Se ha supuesto en este análisis que la probeta fue cargada dos veces en la misma dirección, es decir, que ambas cargas fueron de tensión. Considere ahora el caso en que la segunda carga se aplica en una dirección opuesta a la primera.

Suponga que el material es acero dulce, para el cual el punto de cedencia es el mismo a tensión y a compresión. La carga inicial es de tensión y se aplica hasta que se alcanza el punto C en el diagrama de esfuerzo-deformación (figura 2.20). Después de descargar (punto D), se aplica una carga de compresión, la cual provoca que el material alcance el punto H, donde el esfuerzo es igual a $-\sigma_Y$. Se advierte que la porción DH del diagrama esfuerzo-deformación es curva y no muestra ningún punto de cedencia bien definido. A esto se le conoce como *efecto Bauschinger*. Al mantenerse la carga de compresión, el material fluye a lo largo de la línea HJ.

Si la carga se retira después de alcanzar el punto J, el esfuerzo retorna a cero a lo largo de la línea JK, y se observa que la pendiente de JK es igual al módulo de elasticidad E. La deformación permanente resultante AK será positiva, negativa o cero, dependiendo de las longitudes de los segmentos BC y HJ. Si una carga de tensión se aplica de nuevo a la probeta, la porción del diagrama esfuerzo-deformación que comienza en K (línea punteada) se curvará hacia arriba y hacia la derecha hasta que se alcance el esfuerzo de fluencia σ_Y.

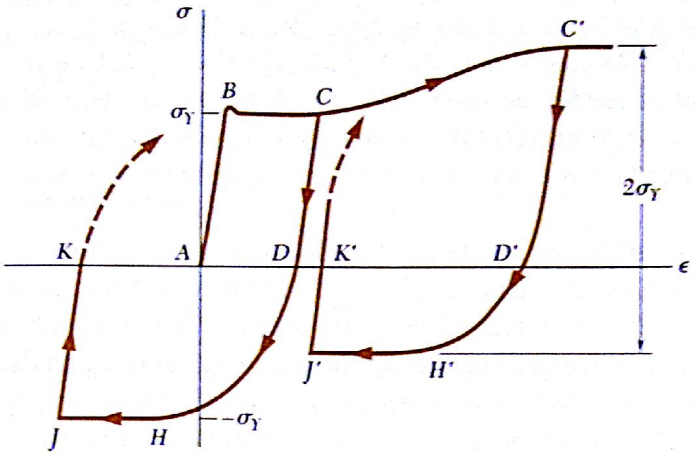


Figura 2.20

Si la carga inicial es lo suficientemente grande para causar el endurecimiento por deformación del material (punto C'), la descarga ocurre a lo largo de la línea $C'D'$. Al aplicarse la carga inversa, el esfuerzo se vuelve de compresión, alcanzando su valor máximo en H' y manteniéndolo mientras el material fluye a lo largo de la línea $H'J'$. Advierta que, en tanto que el máximo valor para el esfuerzo de compresión es menor que σ_Y, el cambio total en esfuerzo entre C' y H' es aún igual a $2\sigma_Y$.

Si el punto K o K' coincide con el origen A del diagrama, la deformación permanente es igual a cero, y parecerá que la probeta ha regresado a su condición original. No obstante, habrán ocurrido cambios internos y, aun cuando la misma secuencia de carga pueda repetirse, la probeta se fracturará sin advertencia previa después de algunas repeticiones. Esto indica que las excesivas deformaciones plásticas a las que ha sido sometida la probeta han causado un cambio radical en las características del material. Las cargas inversas dentro del rango plástico, por lo tanto, rara vez se permiten, por lo que sólo se realizan en condiciones controladas. Tales situaciones ocurren en el enderezado de materiales dañados y en el alineamiento final de una estructura o máquina.

2.7 CARGAS REPETIDAS. FATIGA

En las secciones precedentes se ha considerado el comportamiento de una probeta sujeta a carga axial. Recuerde que, si el esfuerzo máximo en la probeta no excede el límite elástico del material, la probeta regresa a sus condiciones iniciales cuando se retira la carga. Podría concluirse que una carga dada puede repetirse muchas veces, siempre y cuando los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Tal conclusión es correcta para cargas que se repiten unas cuantas docenas o aun centenares de veces. Sin embargo, como se verá, no es correcta cuando las cargas se repiten millares o millones de veces. En tales casos, la fractura ocurrirá aun cuando el esfuerzo sea mucho más bajo que la resistencia estática a la fractura. Este fenómeno se conoce como *fatiga*. Una falla de fatiga es de naturaleza frágil, aun para materiales normalmente dúctiles.

La fatiga debe ser considerada en el diseño de todos los elementos estructurales y de máquinas que se encuentren sujetos a cargas repetitivas o fluctuantes. El número de ciclos de carga que puede esperarse durante la vida útil del componente varía mucho. Por ejemplo, una viga que soporta a una grúa industrial puede cargarse hasta dos millones de veces en 25 años (alrededor de 300 cargas por día de trabajo), el cigüeñal de un automóvil será cargado alrededor de quinientos mil millones de veces si el automóvil opera a lo largo de 200 000 millas, y un álabe individual de una turbina podrá cargarse varios centenares de miles de millones de veces durante su vida.

Algunas cargas son de naturaleza fluctuante. Por ejemplo, el paso del tránsito sobre un puente causará niveles de esfuerzo que fluctuarán alrededor del nivel de esfuerzo debido al peso del puente. Una condición más severa sucede cuando se presenta una inversión completa de la carga durante el ciclo de carga. Los esfuerzos en el eje de un carro de ferrocarril, por ejemplo, se invierten completamente cada media revolución de la rueda.

El número de ciclos de carga necesarios para causar la falla de un espécimen a través de cargas sucesivas o cargas inversas repetidas puede determinarse experimentalmente para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo. Si una serie de ensayos se lleva a cabo, utilizando diferentes niveles de esfuerzo máximo, los datos resultantes podrán graficarse como una curva σ-n. Para cada ensayo, el esfuerzo máximo σ es graficado en la ordenada y el número de ciclos n en la abscisa. Debido al gran número de ciclos n requerido para la ruptura, los ciclos n se grafican en una escala logarítmica.

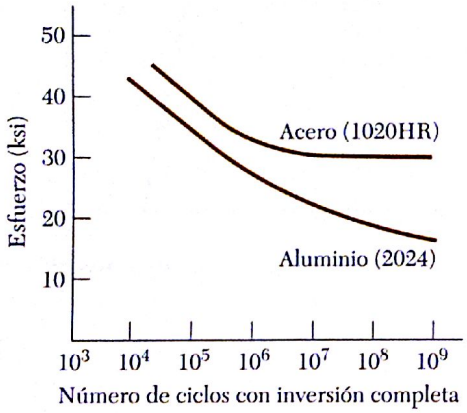


Figura 2.21

Una curva típica σ-n para el acero se muestra en la figura 2.21. Advierta que, si el esfuerzo máximo aplicado es alto, pocos ciclos, relativamente, se requieren para causar la ruptura. Al reducirse la magnitud del esfuerzo máximo, el número de ciclos requeridos para causar la ruptura aumenta hasta que se alcanza un esfuerzo denominado el *límite de resistencia o fatiga*. El límite de fatiga es el esfuerzo para el cual la falla no ocurre, aun cuando haya un número infinitamente grande de ciclos de carga. Para un acero al bajo carbono, como el acero estructural, el límite de fatiga es aproximadamente la mitad de su resistencia última.

Para metales no ferrosos, como el aluminio y el cobre, un diagrama típico σ-n (figura 2.21) muestra que el esfuerzo requerido para la falla continúa disminuyendo al aumentar el número de ciclos de carga. Para tales metales, el *límite de fatiga* se define como el esfuerzo que corresponde a la falla después de un número específico de ciclos de carga, tal como 500 millones.

El examen de especímenes de prueba, de ejes, de resortes y de otros componentes que han fallado por fatiga muestra que la falla se inició en una grieta microscópica o en otra imperfección similar. En cada carga, la grieta se agrandó ligeramente. Durante los sucesivos ciclos de carga, la grieta se propagó en el material hasta que la cantidad de material sin dañar fue insuficiente para soportar la carga máxima, y una falla frágil y abrupta ocurrió. Debido a que la falla por fatiga puede iniciarse en cualquier grieta o imperfección, la condición superficial del elemento tiene un efecto importante en el límite de tolerancia obtenido en el ensayo. El límite de fatiga para especímenes maquinados y pulidos es mayor que para componentes laminados o forjados, o para componentes corroídos. En aplicaciones para el mar o cercanas a él, o en otras aplicaciones donde se espera corrosión, se espera una reducción de hasta el 50% en el límite de fatiga.

2.8 DEFORMACIONES DE ELEMENTOS SOMETIDAS A CARGA AXIAL

Considere una varilla homogénea BC de longitud L y sección transversal uniforme de área A sujeta a una carga axial centrada **P** (figura 2.22). Si el esfuerzo axial resultante $\sigma = P/A$ no excede el límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y se escribe

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

de donde sigue que

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE} \tag{2.5}$$

Recuerde que la deformación ϵ se definió en la sección 2.2 como $\epsilon = \delta/L$, se tiene que

$$\delta = \epsilon L \tag{2.6}$$

y sustituyendo ϵ de la ecuación (2.5) en la (2.6):

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

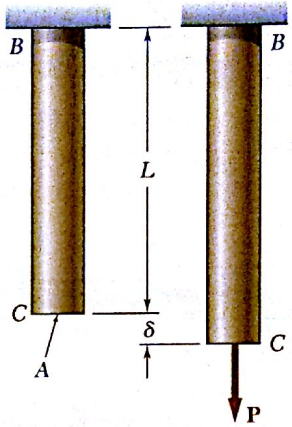


Figura 2.22

La ecuación (2.7) se usará sólo si la varilla es homogénea (E constante), tiene una sección transversal uniforme con área A y está cargada en sus extremos. Si la varilla está cargada en otros puntos, o si consta de varias porciones con distintas secciones transversales y, posiblemente, distintos materiales, debe dividirse en partes que satisfagan de manera individual las condiciones requeridas para la aplicación de la fórmula (2.7). Si, P_i, L_i, A_i y E_i representan, respectivamente, la fuerza interna, longitud, área de sección transversal y módulo de elasticidad que corresponden a la parte i, la deformación de la varilla entera será

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

Recuerde, de la sección 2.2, que en el caso de una varilla con sección transversal variable (figura 2.5), la deformación ϵ depende de la posición del punto Q donde se le calcula y se define como $\epsilon = d\delta/dx$. Despejando $d\delta$ y sustituyendo ϵ de la ecuación (2.5), la deformación de un elemento de longitud dx se expresa como

$$d\delta = \epsilon\, dx = \frac{P\, dx}{AE}$$

La deformación total δ de la varilla se obtiene al integrar esta expresión por la longitud L de la varilla:

$$\delta = \int_0^L \frac{P\, dx}{AE} \tag{2.9}$$

La fórmula (2.9) deberá emplearse en lugar de (2.7), no sólo cuando el área de la sección transversal A es una función de x, sino también cuando la fuerza interna P dependa de x, como es el caso de una varilla suspendida y sometida a la acción de su propio peso.

EJEMPLO 2.01

Determine la deformación de la varilla de acero mostrada en la figura 2.23*a* bajo las cargas dadas ($E = 29 \times 10^{-6}$ psi).

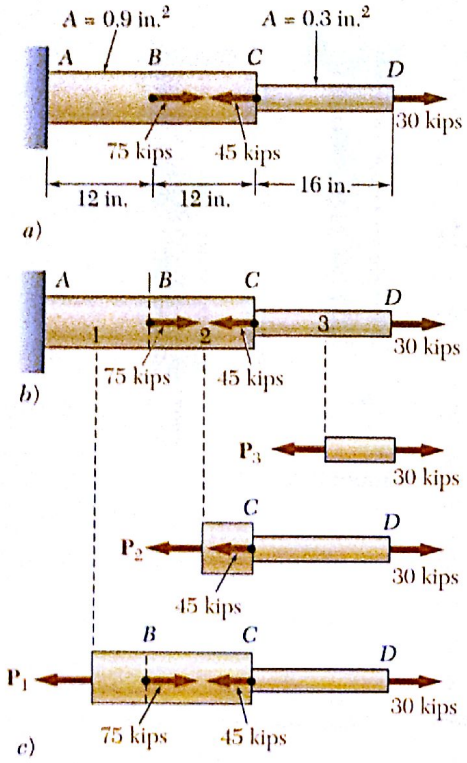


Figura 2.23

Se divide la varilla en tres partes (la figura 2.23*b*) y se tiene

$$L_1 = L_2 = 12 \text{ in.} \qquad L_3 = 16 \text{ in.}$$
$$A_1 = A_2 = 0.9 \text{ in.}^2 \qquad A_3 = 0.3 \text{ in.}^2$$

Para encontrar las fuerzas internas P_1, P_2 y P_3, se deben hacer cortes a través de cada una de las partes, dibujando cada vez un diagrama de cuerpo libre de la porción de la varilla localizada a la derecha de la sección (figura 2.23*c*). Expresando que cada uno de los cuerpos libres está en equilibrio, se obtiene sucesivamente

$$P_1 = 60 \text{ kips} = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_2 = -15 \text{ kips} = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$
$$P_3 = 30 \text{ kips} = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

Llevando los valores obtenidos a la ecuación (2.8), se tiene que

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E}\left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3}\right)$$
$$= \frac{1}{29 \times 10^6}\left[\frac{(60 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3)(12)}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3)(16)}{0.3}\right]$$
$$\delta = \frac{2.20 \times 10^6}{29 \times 10^6} = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

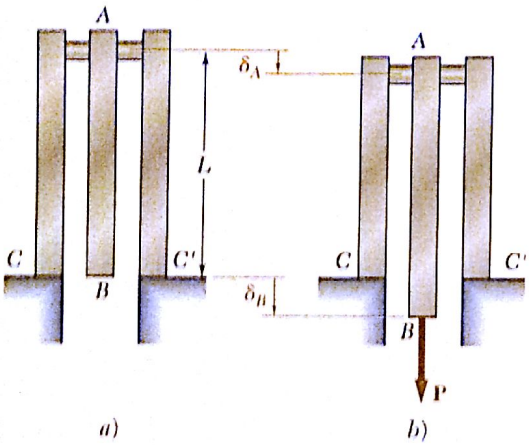
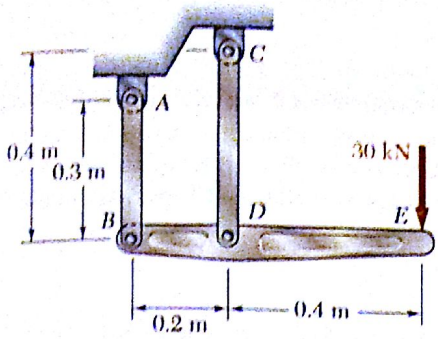


Figura 2.24

Tanto la varilla *BC* de la figura 2.22, que se utilizó para deducir la fórmula (2.7) como la varilla *AD* de la figura 2.23, que acaba de analizarse en el ejemplo 2.01, tenían un extremo sujeto a un soporte fijo. En cada caso, por lo tanto, la deformación δ de la varilla fue igual al desplazamiento de su extremo libre. Cuando ambos extremos de una varilla se mueven, sin embargo, la deformación de la varilla se mide por el *desplazamiento relativo* de un extremo de la varilla con respecto al otro. Considere, por ejemplo, el ensamble mostrado en la figura 2.24*a*, compuesto por tres barras elásticas de longitud L conectadas con un pasador rígido en A. Si una carga $\mathbf{P}$ se aplica en B (figura 2.24*b*), cada una de las tres barras se deformará. Como las barras AC y AC' están unidas a soportes fijos en C y C', su deformación común se mide por el desplazamiento δ_A del punto A. Por otra parte, ya que ambos extremos de la barra AB se mueven, la deformación de AB se mide por la diferencia entre los desplazamientos δ_A y δ_B de los puntos A y B, es decir, por el desplazamiento relativo de B con respecto a A. Denotando este desplazamiento relativo por $\delta_{B/A}$, se escribe

$$\delta_{B/A} = \delta_B - \delta_A = \frac{PL}{AE} \tag{2.10}$$

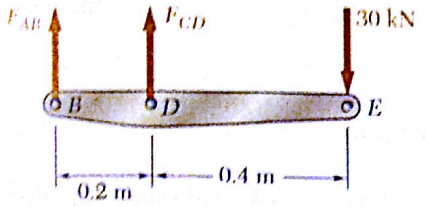
donde A es el área de la sección transversal AB y E es el módulo de elasticidad.



PROBLEMA MODELO 2.1

La barra rígida *BDE* se soporta en dos eslabones *AB* y *CD*. El eslabón *AB* es hecho de aluminio ($E = 70$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 500 mm^2; el eslabón *CD* es de acero ($E = 200$ GPa) y tiene un área de sección transversal de 600 mm^2. Para la fuerza mostrada de 30 kN, determine la deflexión *a*) de *B*, *b*) de *D*, *c*) de *E*.

SOLUCIÓN



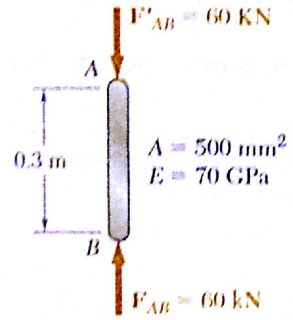
Cuerpo libre: barra *BDE*

$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0.6\text{ m}) + F_{CD}(0.2\text{ m}) = 0$

$F_{CD} = +90\text{ kN} \qquad F_{CD} = 90\text{ kN}$ *tensión*

$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$: $\quad -(30\text{ kN})(0.4\text{ m}) - F_{AB}(0.2\text{ m}) = 0$

$F_{AB} = -60\text{ kN} \qquad F_{AB} = 60\text{ kN}$ *compresión*

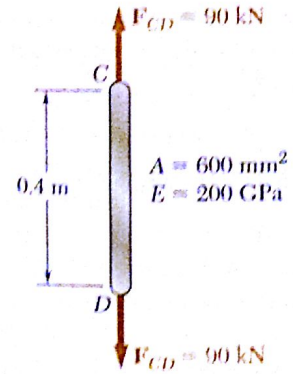


***a*) Deflexión de *B*.** Como la fuerza interna en el eslabón *AB* es compresiva, tenemos que $P = -60$ kN

$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3\text{ N})(0.3\text{ m})}{(500 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(70 \times 10^9\text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6}\text{ m}$$

El signo negativo indica una contracción del elemento *AB* y, por lo tanto, una deflexión hacia arriba de *B*:

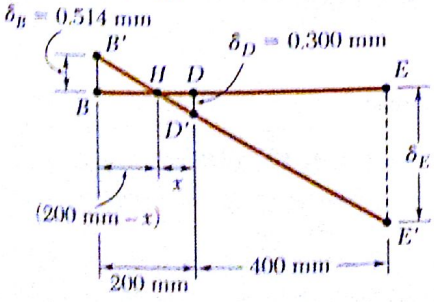
$$\delta_B = 0.514\text{ mm} \uparrow \blacktriangleleft$$



***b*) Deflexión de *D*.** Como la varilla *CD*, $P = 90$ kN, se escribe

$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3\text{ N})(0.4\text{ m})}{(600 \times 10^{-6}\text{ m}^2)(200 \times 10^9\text{ Pa})}$$

$$= 300 \times 10^{-6}\text{ m} \qquad \delta_D = 0.300\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

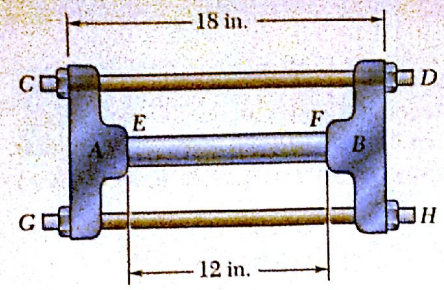


***c*) Deflexión de *E*.** Se denota con B' y D' las posiciones desplazadas de los puntos *B* y *D*. Ya que la barra *BDE* es rígida, los puntos B', D' y E' se encuentran en línea recta y se escribe:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD} \qquad \frac{0.514\text{ mm}}{0.300\text{ mm}} = \frac{(200\text{ mm}) - x}{x} \qquad x = 73.7\text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD} \qquad \frac{\delta_E}{0.300\text{ mm}} = \frac{(400\text{ mm}) + (73.7\text{ mm})}{73.7\text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928\text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

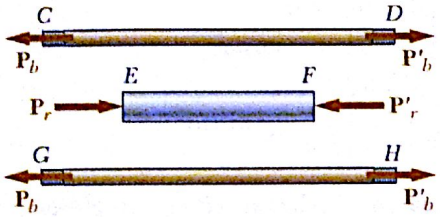


PROBLEMA MODELO 2.2

Las piezas de fundición rígidas A y B están conectadas por dos pernos de acero de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro CD y GH y se encuentran en contacto con los extremos de una varilla de aluminio de 1.5 in. de diámetro EF. Cada perno tiene una cuerda única con un paso de 0.1 in. y, después de ajustarse, las tuercas D y H se aprietan un cuarto de vuelta. Sabiendo que E es de 29×10^6 psi para el acero y 10.6×10^6 psi para el aluminio, determine el esfuerzo normal en la varilla.

SOLUCIÓN

Deformaciones



Pernos CD y GH. Al apretar las tuercas se tensan los pernos. Debido a la simetría, ambas están sometidas a la misma fuerza interna P_b y sufren la misma deformación δ_b. Se tiene

$$\delta_b = +\frac{P_b L_b}{A_b E_b} = +\frac{P_b(18 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(0.75 \text{ in.})^2(29 \times 10^6 \text{ psi})} = +1.405 \times 10^{-6} P_b \qquad (1)$$

Varilla EF. La varilla se encuentra en compresión. Si P_r es la magnitud de la fuerza en la varilla y δ_r es su deformación, se tiene que

$$\delta_r = -\frac{P_r L_r}{A_r E_r} = -\frac{P_r(12 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} = -0.6406 \times 10^{-6} P_r \qquad (2)$$

Desplazamiento de D relativo a B. Apretar las tuercas un cuarto de vuelta hace que los extremos D y H de los pernos sufran un desplazamiento de $\frac{1}{4}(0.1 \text{ in.})$ relativo a la pieza B. Considerando el extremo D, se escribe

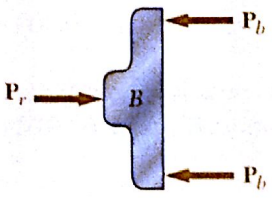
$$\delta_{D/B} = \tfrac{1}{4}(0.1 \text{ in.}) = 0.025 \text{ in.} \qquad (3)$$

Pero $\delta_{D/B} = \delta_D - \delta_B$, donde δ_D y δ_B representan los desplazamientos de D y de B. Si se supone que la pieza A está sujeta en una posición fija mientras que las tuercas en D y en H se aprietan, estos desplazamientos son iguales a las deformaciones de los pernos y de la varilla, respectivamente. Se tiene, entonces,

$$\delta_{D/B} = \delta_b - \delta_r \qquad (4)$$

Sustituyendo de las ecuaciones (1), (2) y (3) en la ecuación (4), se obtiene

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6} P_r \qquad (5)$$



Cuerpo libre: fundición B

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F = 0: \qquad P_r - 2P_b = 0 \qquad P_r = 2P_b \qquad (6)$$

Fuerzas en pernos y varillas

Sustituyendo P_r de la ecuación (6) en la (5), se tiene

$$0.025 \text{ in.} = 1.405 \times 10^{-6} P_b + 0.6406 \times 10^{-6}(2P_b)$$
$$P_b = 9.307 \times 10^3 \text{ lb} = 9.307 \text{ kips}$$
$$P_r = 2P_b = 2(9.307 \text{ kips}) = 18.61 \text{ kips}$$

Esfuerzo en la varilla

$$\sigma_r = \frac{P_r}{A_r} = \frac{18.61 \text{ kips}}{\frac{1}{4}\pi(1.5 \text{ in.})^2} \qquad \sigma_r = 10.53 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.1 Dos marcas de calibración se colocan a una separación exacta de 250 mm en una varilla de aluminio que tiene un diámetro de 12 mm. Si se sabe que al aplicar una carga axial de 6 000 N sobre la varilla, la distancia entre las marcas de calibración es de 250.18 mm, determine el módulo de elasticidad del aluminio usado en la varilla.

2.2 Una varilla de poliestireno de 12 in. de longitud y 0.5 in. de diámetro se somete a una carga de tensión de 800 lb. Si se sabe que $E = 0.45 \times 10^6$ psi, determine *a*) la elongación de la varilla, *b*) el esfuerzo normal en la varilla.

2.3 Un alambre de acero de 60 m de largo se sujeta a una carga de tensión de 6 kN. Si se sabe que $E = 200$ GPa y que la longitud del alambre aumenta 48 mm, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para el alambre, *b*) el esfuerzo normal correspondiente.

2.4 Un alambre de acero de 28 ft de longitud y 0.25 in. de diámetro será empleado en un gancho. Se observa que el alambre se estira 0.45 in. cuando se le aplica una fuerza **P** de tensión. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la magnitud de la fuerza **P**, *b*) el esfuerzo normal correspondiente en el alambre.

2.5 Un tubo de hierro fundido se usa para soportar una carga de compresión. Si se sabe que $E = 69$ GPa y que el cambio permisible máximo en longitud es de 0.025%, determine *a*) el esfuerzo normal máximo en el tubo, *b*) el grosor de pared mínimo para una carga de 7.2 kN si el diámetro exterior del tubo es de 50 mm.

2.6 Una varilla de control de latón amarillo no debe estirarse más de 3 mm cuando la tensión en el alambre es de 4 kN. Si se sabe que $E = 105$ GPa y que el máximo esfuerzo normal permisible es de 180 MPa, determine *a*) el diámetro mínimo que puede seleccionarse para la varilla, *b*) la longitud máxima correspondiente para la varilla.

2.7 Dos marcas de calibración se colocan a una separación exacta de 10 in. en una varilla de aluminio, que tiene un diámetro de $\frac{1}{2}$ in., con $E = 10.1 \times 10^6$ y una resistencia última de 16 ksi. Si se sabe que la distancia entre las marcas de calibración es de 10.009 in. después de que se aplica una carga, determine *a*) el esfuerzo en la varilla, *b*) el factor de seguridad.

2.8 Un alambre de 80 m de largo y 5 mm de diámetro está hecho de un acero con $E = 200$ GPa y una resistencia última a la tensión de 400 MPa. Si se desea un factor de seguridad de 3.2, determine *a*) la tensión máxima permisible en el alambre, *b*) la elongación correspondiente del alambre.

2.9 Un bloque de 250 mm de longitud y de 50×40 mm de sección transversal debe soportar una carga centrada a compresión **P**. El material que se empleará es un bronce para el que $E = 95$ GPa. Determine la carga máxima que puede aplicarse, si se sabe que el esfuerzo normal no debe exceder 80 MPa y que el decremento en longitud del bloque debe ser, cuanto mucho, de 0.12% de su longitud original.

2.10 Una varilla de aluminio de 1.5 m de largo no debe estirarse más de 1 mm y el esfuerzo normal no debe exceder los 40 MPa cuando la varilla está sujeta a una carga axial de 3 kN. Si se sabe que $E = 70$ GPa, determine el diámetro requerido para la varilla.

2.11 Una varilla de control de aluminio debe estirarse 0.08 in. cuando se le aplique una carga de tensión de 500 lb. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 22$ ksi y $E = 10.1 \times 10^6$ psi, determine el menor diámetro y la longitud más corta que puede seleccionarse para la varilla.

2.12 Una barra cuadrada de aluminio no debe estirarse más de 1.4 mm cuando se someta a una carga de tensión. Si se sabe que $E = 70$ GPa y que el esfuerzo permisible a tensión es de 120 MPa, determine *a*) la longitud máxima permisible de la barra, *b*) las dimensiones requeridas para la sección transversal si la carga de tensión es de 28 kN.

2.13 La varilla *BD* está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y se utiliza para reforzar al elemento axialmente comprimido *ABC*. La máxima fuerza que puede desarrollarse en el elemento *BD* es de $0.02P$. Si el esfuerzo no debe exceder 18 ksi y el máximo cambio en longitud de *BD* no debe sobrepasar 0.001 veces la longitud de *ABC*, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para la varilla del elemento *BD*.

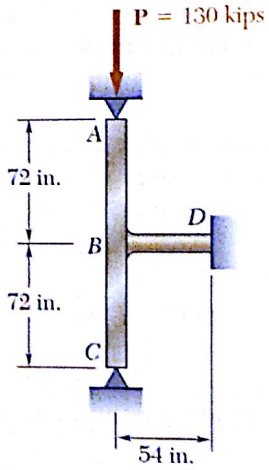


Figura P2.13

2.14 El cable *BC* de 4 mm de diámetro es de un acero con $E = 200$ GPa. Si se sabe que el máximo esfuerzo en el cable no debe exceder 190 MPa y que la elongación del cable no debe sobrepasar 6 mm, encuentre la carga máxima **P** que puede aplicarse como se muestra en la figura.

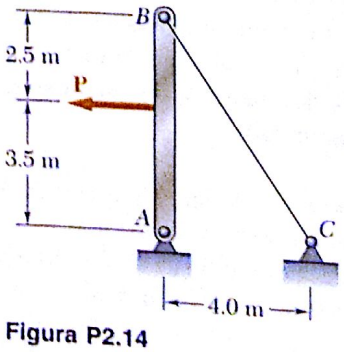


Figura P2.14

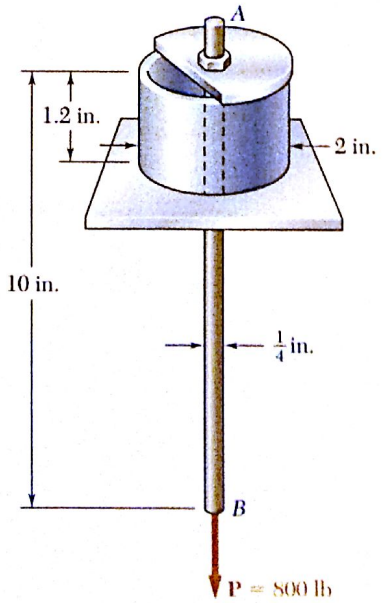


Figura P2.15

2.15 Un cilindro hueco de poliestireno ($E = 0.45 \times 10^6$ psi) con $\frac{1}{8}$ in. de grosor y una placa circular rígida (de la cual se muestra sólo una parte) se usan para soportar una varilla *AB* de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi), con una longitud de 10 in. y un diámetro de $\frac{1}{4}$ in. Si se aplica una carga **P** de 800 lb en *B*, determine *a*) la elongación de la varilla *AB*, *b*) la deflexión del punto *B*, *c*) el esfuerzo normal promedio en la

2.16 La probeta que se muestra en la figura está compuesta por una varilla cilíndrica de acero de 1 in. de diámetro y por dos soportes de 1.5 in. de diámetro exterior unidos a la varilla. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** tal que la deformación total sea de 0.002 in., *b*) la deformación correspondiente de la porción central *BC*.

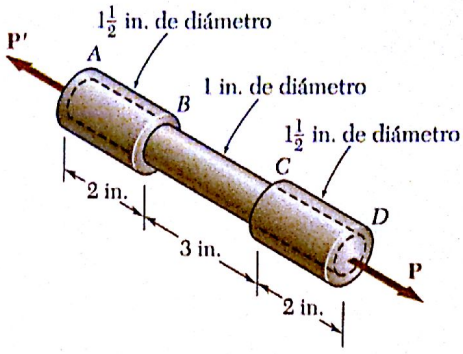


Figura P2.16

2.17 Dos varillas cilíndricas están unidas en *B* y son sometidas a la carga que se muestra en la figura. La varilla *AB* está hecha de acero ($E = 200$ GPa) y la varilla *BC* de latón ($E = 105$ GPa). Determine *a*) la deformación total de la varilla compuesta *ABC*, *b*) la deflexión del punto *B*.

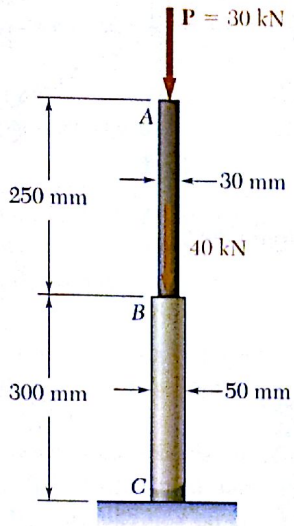


Figura *P2.17*

2.18 Para la varilla compuesta del problema 2.17, determine *a*) la carga *P* tal que la deformación total de la varilla sea –0.2 mm, *b*) la deflexión correspondiente del punto *B*.

2.19 Las dos porciones de la varilla *ABC* están hechas de un aluminio para el que $E = 70$ GPa. Si se sabe que la magnitud de **P** es de 4 kN, encuentre *a*) el valor de **Q** para que la deflexión en *A* sea cero, *b*) la deflexión correspondiente de *B*.

2.20 La varilla *ABC* está hecha de un aluminio para el que $E = 70$ GPa. Si se sabe que $P = 6$ kN y que $Q = 42$ kN, determine la deflexión de *a*) el punto *A*, *b*) el punto *B*.

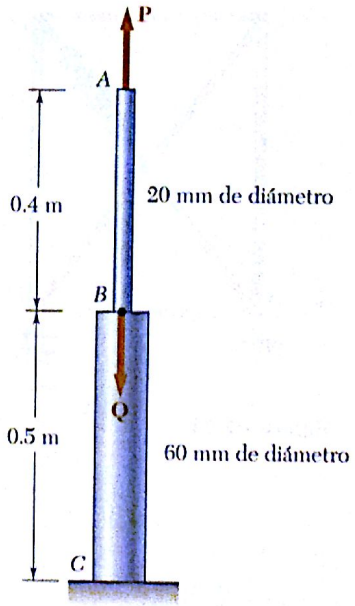


Figura P2.19 y P2.20

2.21 Para la armadura de acero ($E = 200$ GPa) y la carga mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos *AB* y *AD*, si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de 2 400 mm^2 y 1 800 mm^2.

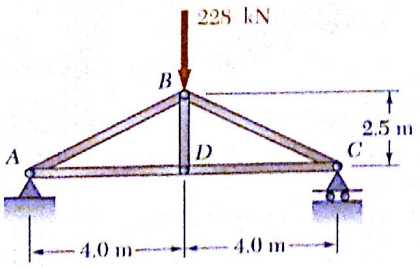


Figura P2.21

2.22 Para la armadura de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y la carga mostradas en la figura, determine las deformaciones de los elementos BD y DE, si se sabe que sus respectivas áreas de sección transversal son de 2 in.^{2} y 3 in.^{2}

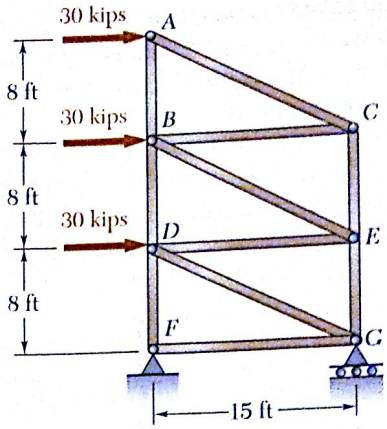


Figura *P2.22*

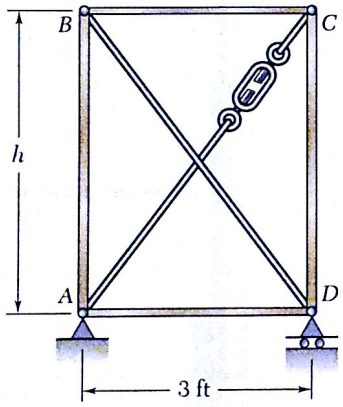


Figura P2.23

2.23 Los elementos AB y CD son varillas de acero de $1\frac{1}{8}$ in. de diámetro y los elementos BC y AD son varillas de acero de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro. Cuando se aprieta el tensor, el elemento diagonal AC se pone en tensión. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $h = 4$ ft, determine la tensión máxima permisible en AC para que las deformaciones en los elementos AB y CD no sobrepasen 0.04 in.

2.24 Para la estructura del problema 2.23, determine *a*) la distancia h para que las deformaciones en los elementos AB, BC, CD y AD sean iguales a 0.04 in. y *b*) la tensión correspondiente en el elemento AC.

2.25 Cada uno de los cuatro eslabones verticales que conectan los dos elementos horizontales que se muestran en la figura está hecho de aluminio ($E = 70$ GPa) y tiene una sección transversal rectangular uniforme de 10×40 mm. Para la carga mostrada, determine la deflexión de *a*) el punto E, *b*) el punto F y *c*) el punto G.

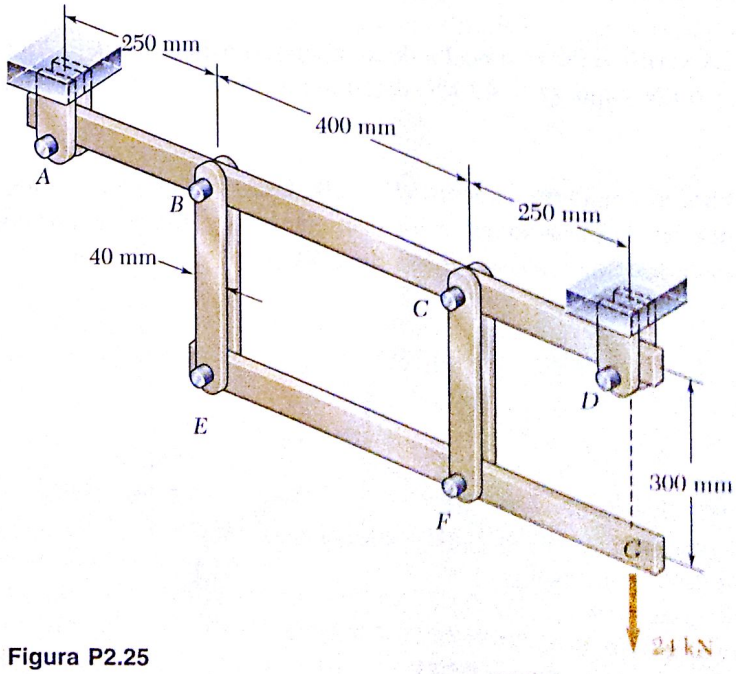


Figura P2.25

2.26 Los eslabones AB y CD están hechos de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y tienen una sección transversal rectangular uniforme de $\frac{1}{4} \times 1$ in. Determine la carga máxima que puede colgarse en el punto E si la deflexión de E no debe sobrepasar 0.01 in.

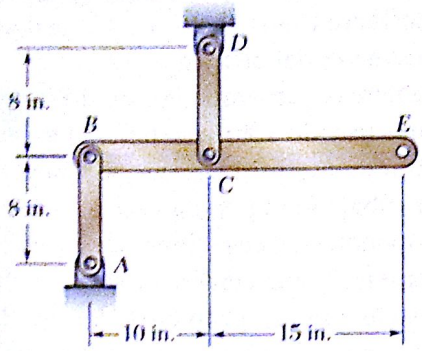


Figura P2.26

2.27 Cada uno de los eslabones AB y CD está hecho de aluminio ($E = 75$ GPa) y tienen un área de sección transversal de 125 mm^2. Si se sabe que soportan al elemento rígido BC, determine la deflexión del punto E.

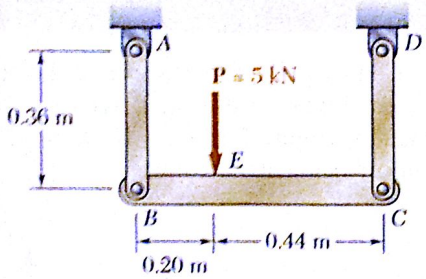


Figura P2.27

2.28 La longitud del alambre de acero de 2 mm de diámetro CD ha sido ajustada de forma que, si no se aplica ninguna carga, existe una distancia de 1.5 mm entre el extremo B de la viga rígida ACB y un punto de contacto E. Si se sabe que $E = 200$ GPa, determine el sitio sobre la viga donde debe colocarse un bloque de 20 kg para provocar un contacto entre B y E.

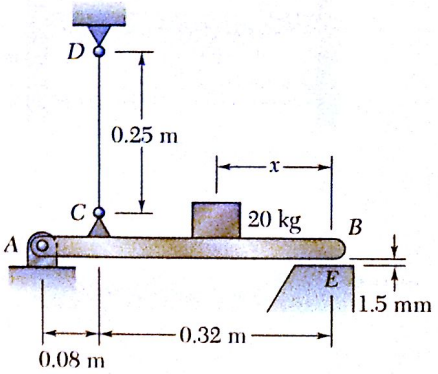


Figura P2.28

2.29 Un cable homogéneo de longitud L y sección transversal uniforme se cuelga de un extremo. *a)* Si se denota con ρ la densidad (masa por unidad de volumen) del cable y con E su módulo de elasticidad, determine la elongación que sufre el cable debido a su propio peso. *b)* Demuestre que para obtener la misma elongación debe aplicarse una fuerza igual a la mitad de su peso en cada uno de los extremos del cable en posición horizontal.

2.30 Una carga vertical **P** se aplica en el centro A de la sección superior de un cono truncado circular homogéneo con altura h, radio mínimo a y radio máximo b. Si se denota con E el módulo de elasticidad del material y se desprecia el efecto de su peso, determine la deflexión del punto A.

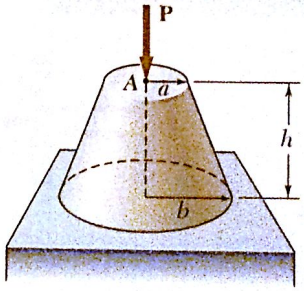


Figura P2.30

2.31 Si ϵ es la "deformación unitaria ingenieril" de un modelo en tensión, demuestre que la deformación unitaria real es $\epsilon_t = \ln(1 + \epsilon)$.

2.32 El volumen de un modelo de tensión es esencialmente constante mientras ocurre la deformación plástica. Si el diámetro inicial del modelo es d_1, demuestre que cuando el diámetro es d, la deformación unitaria real es $\epsilon_t = 2 \ln(d_1/d)$.

2.9 PROBLEMAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADOS

En los problemas considerados en la sección precedente, siempre se pudo emplear los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas internas producidas en las distintas porciones de un elemento bajo unas condiciones dadas de carga. Los valores obtenidos de las fuerzas internas luego fueron introducidos en la ecuación (2.8) o en la (2.9) para obtener la deformación del elemento.

Hay muchos problemas, sin embargo, en donde no es posible determinar las fuerzas internas usando sólo la estática. De hecho, en la mayoría de estos problemas las reacciones mismas, que son fuerzas externas, no pueden hallarse simplemente dibujando un diagrama de cuerpo libre del elemento y escribiendo las correspondientes ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio deben complementarse con relaciones que involucran las deformaciones obtenidas considerando la geometría del problema. Debido a que la estática no es suficiente para determinar las reacciones o las fuerzas internas, los problemas de este tipo se conocen como *estáticamente indeterminados*. Los siguientes ejemplos mostrarán cómo manejar este tipo de problemas.

EJEMPLO 2.02

Una varilla de longitud L, área de sección transversal A_1 y módulo de elasticidad E_1, se ha colocado dentro de un tubo con la misma longitud L, pero de área de sección transversal A_2 y módulo de elasticidad E_2 (figura 2.25*a*). ¿Cuál es la deformación de la varilla y del tubo cuando una fuerza **P** se ejerce en la placa rígida del extremo como se muestra en la figura?

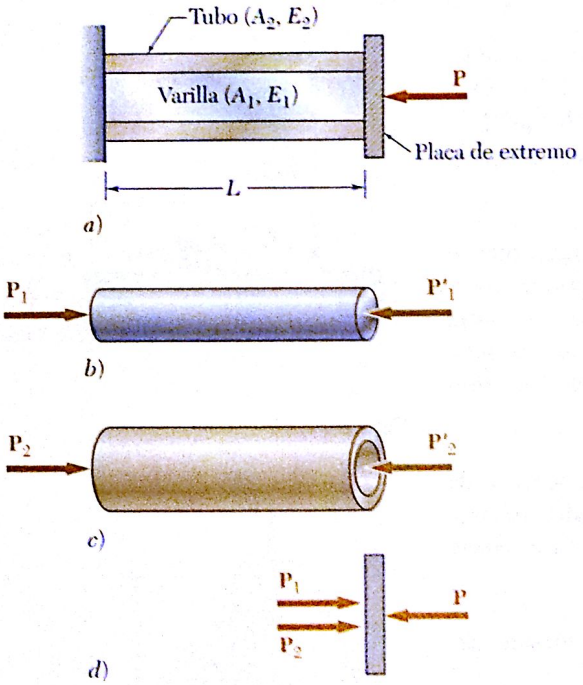


Figura 2.25

Con P_1 y P_2, respectivamente, las fuerzas axiales en la varilla y en el tubo, se dibujan diagramas de cuerpo libre de los tres elementos (figura 2.25*b*, *c* y *d*). Sólo el último de los diagramas da información significativa:

$$P_1 + P_2 = P \tag{2.11}$$

Es claro que una ecuación no es suficiente para determinar las dos fuerzas internas desconocidas P_1 y P_2. El problema es estáticamente indeterminado.

No obstante, la geometría del problema muestra que las deformaciones δ_1 y δ_2 de la varilla y del tubo deben ser iguales. Tomando en cuenta la ecuación (2.7), se escribe

$$\delta_1 = \frac{P_1 L}{A_1 E_1} \qquad \delta_2 = \frac{P_2 L}{A_2 E_2} \tag{2.12}$$

Igualando las deformaciones δ_1 y δ_2, se obtiene:

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \tag{2.13}$$

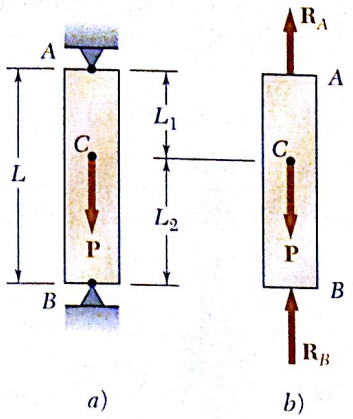
Las ecuaciones (2.11) y (2.13) pueden resolverse simultáneamente para obtener P_1 y P_2:

$$P_1 = \frac{A_1 E_1 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \qquad P_2 = \frac{A_2 E_2 P}{A_1 E_1 + A_2 E_2}$$

Cualquiera de las ecuaciones (2.12) podrá emplearse para determinar la deformación común de la varilla y del tubo.

EJEMPLO 2.03

Una barra AB de longitud L y sección transversal uniforme se sujeta a soportes rígidos en A y B antes de cargarse. ¿Cuáles son los esfuerzos en las porciones AC y BC debido a la aplicación de la carga P en el punto C (figura 2.26*a*)?



a) *b)*

Figura 2.26

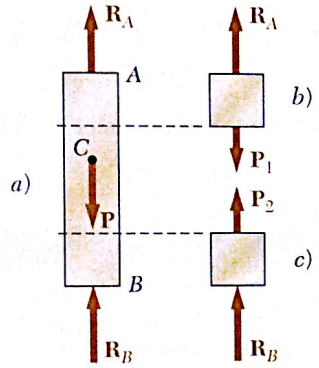


Figura 2.27

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.26*b*), se obtiene la ecuación de equilibrio

$$R_A + R_B = P \tag{2.14}$$

Ya que esta ecuación no es suficiente para determinar las dos reacciones desconocidas R_A y R_B, el problema es estáticamente indeterminado.

Sin embargo, las reacciones pueden determinarse si se observa de la geometría que el alargamiento total de la barra δ debe ser cero. Denotando con δ_1 y δ_2, respectivamente, los alargamientos de las porciones AC y BC, escribimos

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

o, expresando δ_1 y δ_2 en términos de las fuerzas internas correspondientes P_1 y P_2:

$$\delta = \frac{P_1 L_1}{AE} + \frac{P_2 L_2}{AE} = 0 \tag{2.15}$$

Se advierte de los diagramas de cuerpo libre mostrados respectivamente en las partes *b*) y *c*) de la figura 2.27 que $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$. Al llevar estos valores a la ecuación (2.15), se escribe

$$R_A L_1 - R_B L_2 = 0 \tag{2.16}$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.16) pueden resolverse simultáneamente para R_A y R_B; se obtiene $R_A = PL_2/L$ y $R_B = PL_1/L$. Los esfuerzos deseados σ_1 en AC y σ_2 en BC se obtienen dividiendo, respectivamente, $P_1 = R_A$ y $P_2 = -R_B$ entre el área de sección transversal de la barra:

$$\sigma_1 = \frac{PL_2}{AL} \qquad \sigma_2 = -\frac{PL_1}{AL}$$

Método de superposición. Se observa que una estructura es estáticamente indeterminada cuando está sostenida por más soportes de los necesarios para mantener su equilibrio. Esto da como resultado más reacciones desconocidas que ecuaciones de equilibrio disponibles. A menudo es conveniente considerar una de las reacciones como *redundante* y eliminar el soporte correspondiente. Debido a que las condiciones dadas del problema no pueden cambiarse arbitrariamente, la reacción redundante debe mantenerse en la solución. Pero se considerará como una *carga desconocida* que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con las restricciones originales. La solución real del problema se obtiene considerando, en forma separada, las deformaciones producidas por las cargas dadas y por la reacción redundante y sumando —o *superponiendo*— los resultados obtenidos.†

† Las condiciones generales bajo las que el efecto combinado de varias cargas puede obtenerse de esta manera se analizan en la sección 2.12.

EJEMPLO 2.04

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y la carga mostradas en la figura 2.28, suponiendo un ensamble ajustado en ambos apoyos antes de que se apliquen las cargas.

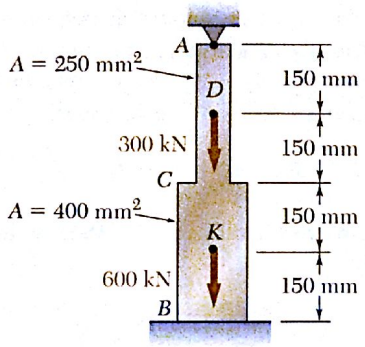


Figura 2.28

Considere la reacción en B como redundante y libere la barra de ese soporte. La reacción $\mathbf{R}_B$ se considera ahora como una carga desconocida (figura 2.29*a*) y se determinará a partir de la condición de que la deformación δ de la varilla debe ser igual a cero. La solución se obtiene considerando separadamente la deformación δ_L causada por las cargas dadas (figura 2.29*b*) y la deformación δ_R debida a la reacción redundante $\mathbf{R}_B$ (figura 2.29*c*).

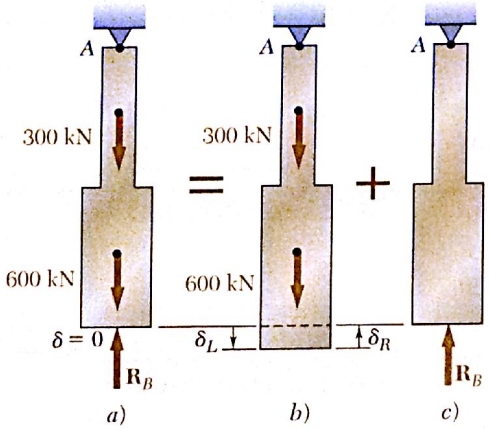


Figura 2.29

La deformación δ_L se obtiene de la ecuación (2.8) después de que la barra se divide en cuatro partes, como se muestra en la figura 2.30. Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.01, se tiene

$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3\ \text{N} \quad P_4 = 900 \times 10^3\ \text{N}$$
$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150\ \text{m}$$

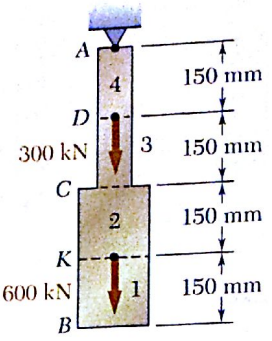


Figura 2.30

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.8), se obtiene

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{4} \frac{P_i L_i}{A_i E} = \left(0 + \frac{600 \times 10^3\ \text{N}}{400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} + \frac{600 \times 10^3\ \text{N}}{250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} + \frac{900 \times 10^3\ \text{N}}{250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2}\right)\frac{0.150\ \text{m}}{E}$$

$$\delta_L = \frac{1.125 \times 10^9}{E} \tag{2.17}$$

Considerando ahora la deformación δ_R debido a la reacción redundante R_B, se divide la barra en dos porciones, como se muestra en la figura 2.31, y se escribe

$$P_1 = P_2 = -R_B$$
$$A_1 = 400 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$
$$L_1 = L_2 = 0.300\ \text{m}$$

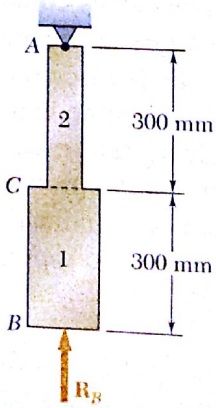


Figura 2.31

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2.8), se obtiene

$$\delta_R = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E} = -\frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} \qquad (2.18)$$

Expresando que la deformación total δ de la barra debe ser cero, se escribe

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0 \qquad (2.19)$$

y sustituyendo δ_L y δ_R de las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.19)

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{E} = 0$$

Despejando R_B, se tiene que

$$R_B = 577 \times 10^3\,\text{N} = 577\,\text{kN}$$

La reacción R_A en el soporte superior se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.32). Se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300\,\text{kN} - 600\,\text{kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900\,\text{kN} - R_B = 900\,\text{kN} - 577\,\text{kN} = 323\,\text{kN}$$

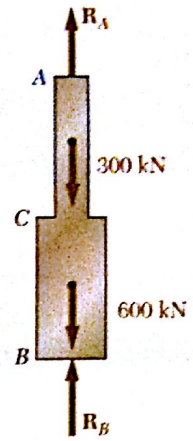


Figura 2.32

Una vez que las reacciones se han determinado, los esfuerzos y las deformaciones en la barra se obtienen fácilmente. Debe observarse que, aunque la deformación de la barra es cero, cada una de sus partes componentes *se deforma* bajo la carga y condiciones de restricción dadas.

EJEMPLO 2.05

Determine las reacciones en A y en B para la barra de acero y carga del ejemplo 2.04, suponiendo ahora que existe un claro de 4.50 mm entre la barra y el piso antes de que se apliquen las cargas (figura 2.33). Suponga que $E = 200$ GPa.

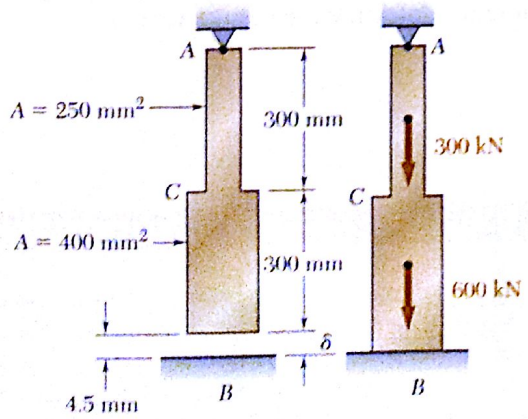


Figura 2.33

Se sigue el mismo procedimiento que en el ejemplo 2.04. Considerando la reacción en B como redundante, se calculan las deformaciones δ_L y δ_R causadas, respectivamente, por las cargas dadas y por la reacción redundante $\mathbf{R}_B$. Sin embargo, en este caso la deformación total no es cero, sino $\delta = 4.5$ mm. Por lo tanto, se escribe

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 4.5 \times 10^{-3}\,\text{m} \qquad (2.20)$$

Sustituyendo δ_L y δ_R de las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.20) y recordando que $E = 200$ GPa $= 200 \times 10^9$ Pa, se tiene que

$$\frac{1.125 \times 10^9}{200 \times 10^9} - \frac{(1.95 \times 10^3)R_B}{200 \times 10^9} = 4.5 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

Despejando R_B, se obtiene

$$R_B = 115.4 \times 10^3\,\text{N} = 115.4\,\text{kN}$$

La reacción en A se obtiene del diagrama de cuerpo libre de la barra (figura 2.32):

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \qquad R_A - 300\,\text{kN} - 600\,\text{kN} + R_B = 0$$
$$R_A = 900\,\text{kN} - R_B = 900\,\text{kN} - 115.4\,\text{kN} = 785\,\text{kN}$$

2.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN CAMBIOS DE TEMPERATURA

Se ha supuesto que todos los elementos y estructuras que hasta ahora se han considerado se mantienen a la misma temperatura cuando cargan. Ahora se estudiarán varias situaciones que involucran cambios de temperatura.

Primero considere la varilla homogénea AB con sección transversal uniforme, que descansa libremente en una superficie horizontal lisa (figura 2.34*a*). Si la temperatura de la varilla se eleva en ΔT, se observa que la varilla se alarga por una cantidad δ_T, que es proporcional tanto al cambio de temperatura ΔT como a la longitud L de la varilla (figura 2.34*b*). Se tiene que

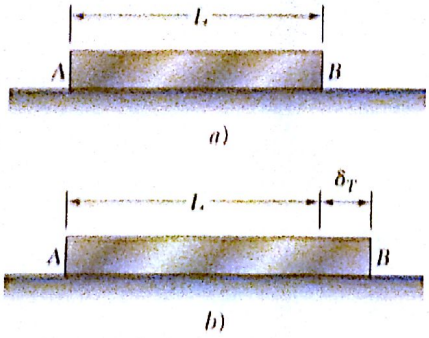


Figura 2.34

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

donde α es una constante característica del material, llamada *coeficiente de expansión térmica*. Como δ_T y L se expresan ambas en unidades de longitud, α representa una cantidad *por grado C* o *por grado F*, dependiendo si el cambio de temperatura se expresa en grados Celsius o Fahrenheit.

Con la deformación δ_T debe asociarse una deformación $\epsilon_T = \delta_T/L$. Recordando la ecuación 2.21, se concluye que

$$\epsilon_T = \alpha\,\Delta T \tag{2.22}$$

La deformación ϵ_T se conoce como *deformación unitaria térmica*, ya que es causada por el cambio en la temperatura de la varilla. En el caso que consideramos aquí, *no existe esfuerzo asociado con la deformación* ϵ_T.

Ahora suponga que la misma varilla AB de longitud L se coloca entre dos soportes fijos a una distancia L uno del otro (figura 2.35*a*). Nuevamente, no existe esfuerzo ni deformación en esta condición inicial. Si se eleva la temperatura en ΔT, la varilla no puede alargarse debido a las restricciones impuestas en sus extremos; la elongación δ_T de la varilla es por lo tanto cero. Como la varilla es homogénea y de sección transversal uniforme, la deformación ϵ_T en cualquier punto es $\epsilon_T = \delta_T/L$ y, por lo tanto, también cero. Sin embargo, los soportes ejercerán fuerzas $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ iguales y opuestas sobre la varilla después de que se haya elevado la temperatura, para evitar que se elongue (figura 2.35*b*). Se tiene, por lo tanto, que se crea un estado de esfuerzos (sin su correspondiente deformación) en la varilla.

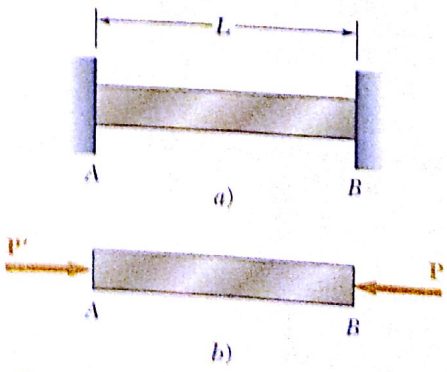


Figura 2.35

En la preparación para determinar el esfuerzo σ creado por el cambio de temperatura ΔT, se observa que el problema por resolver es estáticamente indeterminado. Por lo tanto, primero deberá calcularse la magnitud P de las reacciones en los soportes a partir de la condición de que la elongación de la varilla es cero. Utilizando el método de superposición descrito en la sección 2.9, se libera la varilla de su apoyo B (figura 2.36*a*) y se le permite alargarse libremente mientras sufre el cambio de temperatura ΔT (figura 2.36*b*). De acuerdo con la fórmula (2.21), el alargamiento correspondiente es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L$$

Aplicando ahora al extremo B la fuerza **P** que representa la reacción redundante, y empleando la fórmula (2.7), se obtiene la segunda deformación (véase figura 2.36*c*)

$$\delta_P = \frac{PL}{AE}$$

Expresando que la deformación total δ debe ser cero, se tiene

$$\delta = \delta_T + \delta_P = \alpha(\Delta T)L + \frac{PL}{AE} = 0$$

de donde se concluye que

$$P = -AE\alpha(\Delta T)$$

y que el esfuerzo en la varilla debido al cambio de temperatura ΔT es

$$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha(\Delta T) \tag{2.23}$$

Debe recordarse que el resultado obtenido aquí y la anterior observación con respecto a la ausencia de deformación alguna en la varilla *sólo se aplican al caso de una varilla homogénea con sección transversal uniforme*. Cualquier otro problema que implique una estructura restringida sometida a un cambio de temperatura debe analizarse en las condiciones aplicables. Sin embargo, el mismo enfoque general puede usarse, es decir, es posible considerar, en forma separada, la deformación debida al cambio de temperatura y la debida a la reacción redundante y superponer las soluciones obtenidas.

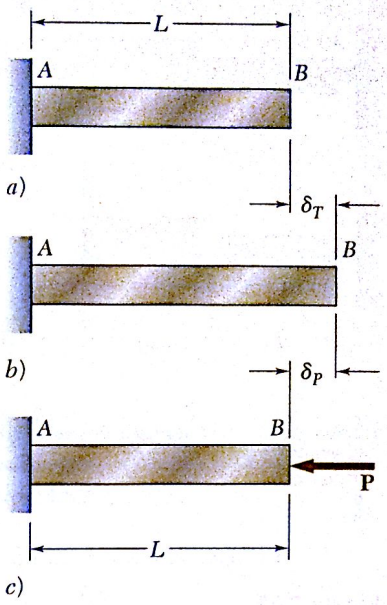


Figura 2.36

EJEMPLO 2.06

Determine los valores del esfuerzo en las porciones AC y CB de la barra de acero mostrada en la figura 2.37 cuando la temperatura de la barra es de $-50°F$, sabiendo que existe un buen ajuste en ambos soportes rígidos cuando la temperatura es de $+75°F$. Utilice los valores de $E = 29 \times 10^6$ psi y $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}/°F$ para el acero.

Primero se determinan las reacciones en los soportes. Como el problema es estáticamente indeterminado, se desprende la barra de su apoyo en b y se le deja pasar por el cambio de temperatura

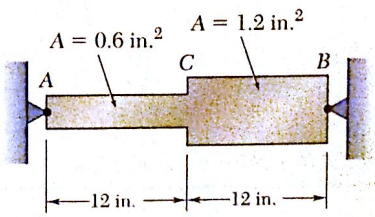


Figura 2.37

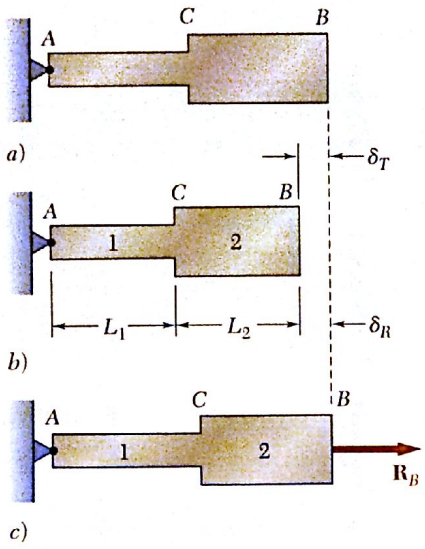


Figura 2.38

$$\Delta T = (-50°\text{F}) - (75°\text{F}) = -125°\text{F}$$

La deformación correspondiente (figura 2.38*b*) es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L = (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125°\text{F})(24\text{ in.})$$
$$= -19.50 \times 10^{-3}\text{ in.}$$

Aplicando ahora la fuerza desconocida $\mathbf{R}_B$ en el extremo B (figura 2.38*c*), se utiliza la ecuación (2.8) para expresar la deformación correspondiente δ_R. Sustituyendo

$$L_1 = L_2 = 12\text{ in.}$$
$$A_1 = 0.6\text{ in.}^2 \qquad A_2 = 1.2\text{ in.}^2$$
$$P_1 = P_2 = R_B \qquad E = 29 \times 10^6\text{ psi}$$

en la ecuación (2.8), se escribe

$$\delta_R = \frac{P_1L_1}{A_1E} + \frac{P_2L_2}{A_2E}$$
$$= \frac{R_B}{29 \times 10^6\text{ psi}}\left(\frac{12\text{ in.}}{0.6\text{ in.}^2} + \frac{12\text{ in.}}{1.2\text{ in.}^2}\right)$$
$$= (1.0345 \times 10^{-6}\text{ in./lb})R_B$$

Expresando que la deformación total de la barra debe ser cero como resultado de las restricciones impuestas, se escribe

$$\delta = \delta_T + \delta_R = 0$$
$$= -19.50 \times 10^{-3}\text{ in.} + (1.0345 \times 10^{-6}\text{ in./lb})R_B = 0$$

de lo que se obtiene

$$R_B = 18.85 \times 10^3\text{ lb} = 18.85\text{ kips}$$

La reacción en A es igual y opuesta.

Note que las fuerzas en las dos porciones de la barra son $P_1 = P_2 = 18.85$ kips; se obtienen los siguientes valores de esfuerzo en las porciones AC y CB de la barra:

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{18.85\text{ kips}}{0.6\text{ in.}^2} = +31.42\text{ ksi}$$
$$\sigma_2 = \frac{P_2}{A_2} = \frac{18.85\text{ kips}}{1.2\text{ in.}^2} = +15.71\text{ ksi}$$

No puede enfatizarse demasiado el hecho de que, a pesar de que la *deformación total* de la barra debe ser cero, ya que las deformaciones de las porciones AC y CB *no son cero*. Una solución para el problema basada en la suposición de que estas deformaciones son cero sería equivocada. Tampoco puede suponerse que los valores de la deformación unitaria en AC o en CB sean iguales a cero. Para ampliar este punto, determine la deformación ϵ_{AC} en la porción AC de la barra. La deformación ϵ_{AC} puede dividirse en dos partes; una es la deformación térmica ϵ_T producida en la barra sin restricciones por el cambio de temperatura Δ_T (figura 2.38*b*). De la ecuación (2.22) se escribe

$$\epsilon_T = \alpha\,\Delta T = (6.5 \times 10^{-6}/°\text{F})(-125°\text{F})$$
$$= -812.5 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

La otra componente de ϵ_{AC} se asocia con el esfuerzo σ_1 debido a la fuerza $\mathbf{R}_B$ aplicada a la barra (figura 2.38*c*). De la ley de Hooke, se expresa esta componente de la deformación como

$$\frac{\sigma_1}{E} = \frac{+31.42 \times 10^3\text{ psi}}{29 \times 10^6\text{ psi}} = +1\,083.4 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

Sumando las dos componentes de la deformación en AC, se obtiene

$$\epsilon_{AC} = \epsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 1\,083.4 \times 10^{-6}$$
$$= +271 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

Un cálculo similar da la deformación de la porción CB de la barra:

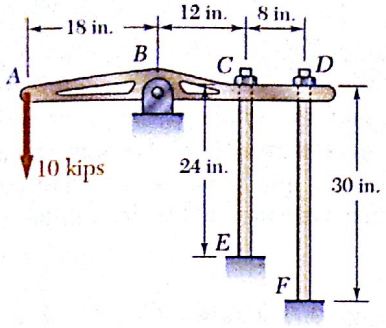
$$\epsilon_{CB} = \epsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -812.5 \times 10^{-6} + 541.7 \times 10^{-6}$$
$$= -271 \times 10^{-6}\text{ in./in.}$$

Las deformaciones δ_{AC} y δ_{CB} de las dos porciones de la barra se expresan respectivamente como

$$\delta_{AC} = \epsilon_{AC}(AC) = (+271 \times 10^{-6})(12\text{ in.})$$
$$= +3.25 \times 10^{-3}\text{ in.}$$
$$\delta_{CB} = \epsilon_{CB}(CB) = (-271 \times 10^{-6})(12\text{ in.})$$
$$= -3.25 \times 10^{-3}\text{ in.}$$

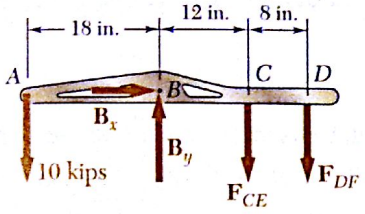
Puede así verificarse que, mientras que la suma $\delta = \delta_{AC} + \delta_{CB}$ de las dos deformaciones es cero, ninguna de ellas es cero.

PROBLEMA MODELO 2.3



La varilla CE de $\frac{1}{2}$ in. de diámetro y la varilla DF de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro están unidas a la barra rígida $ABCD$ como se muestra en la figura. Sabiendo que las varillas son de aluminio y utilizando $E = 10.6 \times 10^6$ psi, determine *a*) la fuerza en cada varilla causada por la carga mostrada, *b*) la deflexión correspondiente en el punto A.

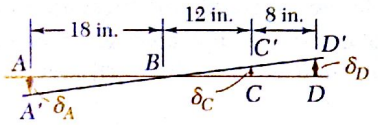
SOLUCIÓN



Estática. Considerando el cuerpo libre de la barra $ABCD$, se advierte que la reacción en B y las fuerzas ejercidas por las varillas son indeterminadas. Sin embargo, utilizando la estática, puede escribirse

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: \quad (10 \text{ kips})(18 \text{ in.}) - F_{CE}(12 \text{ in.}) - F_{DF}(20 \text{ in.}) = 0$$

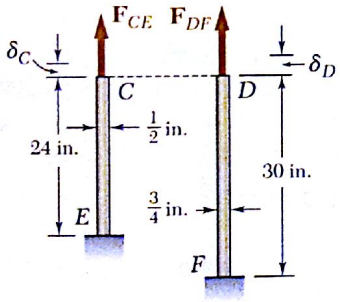
$$12F_{CE} + 20F_{DF} = 180 \tag{1}$$



Geometría. Después de la aplicación de la carga de 10 kips, la posición de la barra es $A'BC'D'$. De los triángulos semejantes BAA', BCC' y BDD', se tiene que

$$\frac{\delta_C}{12 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_C = 0.6\delta_D \tag{2}$$

$$\frac{\delta_A}{18 \text{ in.}} = \frac{\delta_D}{20 \text{ in.}} \qquad \delta_A = 0.9\delta_D \tag{3}$$



Deformaciones. Usando la ecuación (2.7), se tiene que

$$\delta_C = \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} \qquad \delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

Sustituyendo δ_C y δ_D en la ecuación (2), se escribe

$$\delta_C = 0.6\delta_D \qquad \frac{F_{CE}L_{CE}}{A_{CE}E} = 0.6\frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E}$$

$$F_{CE} = 0.6\frac{L_{DF}}{L_{CE}}\frac{A_{CE}}{A_{DF}}F_{DF} = 0.6\left(\frac{30 \text{ in.}}{24 \text{ in.}}\right)\left[\frac{\frac{1}{4}\pi(\frac{1}{2} \text{ in.})^2}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4} \text{ in.})^2}\right]F_{DF} \qquad F_{CE} = 0.333F_{DF}$$

Fuerza en cada varilla. Sustituyendo F_{CE} en la ecuación (1) y teniendo en cuenta que todas las fuerzas se han expresado en kips, se tiene que

$$12(0.333F_{DF}) + 20F_{DF} = 180 \qquad F_{DF} = 7.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

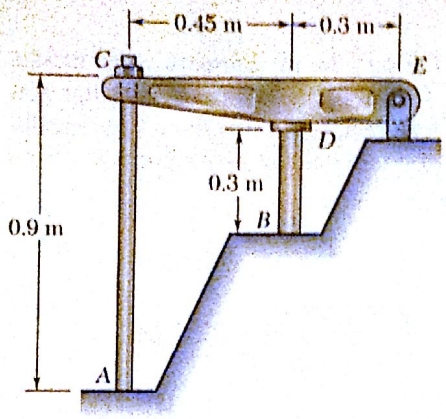
$$F_{CE} = 0.333F_{DF} = 0.333(7.50 \text{ kips}) \qquad F_{CE} = 2.50 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

Deflexiones. La deflexión del punto D es

$$\delta_D = \frac{F_{DF}L_{DF}}{A_{DF}E} = \frac{(7.50 \times 10^3 \text{ lb})(30 \text{ in.})}{\frac{1}{4}\pi(\frac{3}{4} \text{ in.})^2(10.6 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \delta_D = 48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Utilizando la ecuación (3), se tiene

$$\delta_A = 0.9\delta_D = 0.9(48.0 \times 10^{-3} \text{ in.}) \qquad \delta_A = 43.2 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$



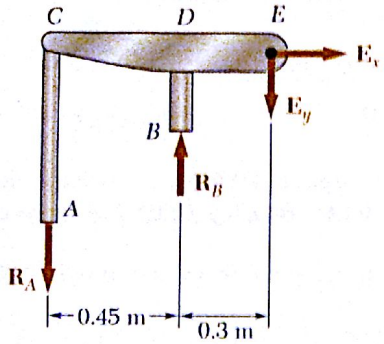
PROBLEMA MODELO 2.4

La barra rígida *CDE* está unida a un apoyo con pasador en *E* y descansa sobre el cilindro de latón de 30 mm de diámetro *BD*. Una varilla de acero de 22 mm de diámetro *AC* pasa a través de un agujero en la barra y está asegurada por una tuerca que se encuentra ajustada cuando todo el ensamble se encuentra a 20°C. La temperatura del cilindro de latón se eleva entonces a 50°C mientras que la varilla de acero permanece a 20°C. Suponiendo que no había esfuerzos presentes antes del cambio de temperatura, determine el esfuerzo en el cilindro.

Varilla *AC*: Acero
$E = 200$ GPa
$\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$/°C

Cilindro *BD*: Latón
$E = 105$ GPa
$\alpha = 20.9 \times 10^{-6}$/°C

SOLUCIÓN



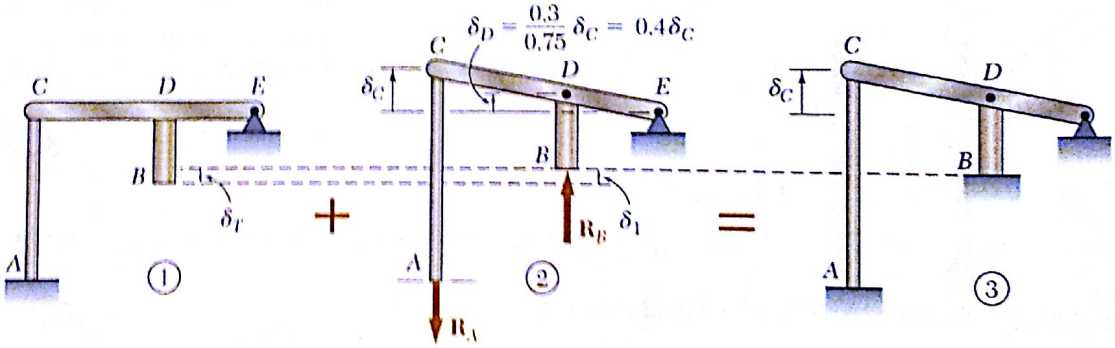
Estática. Considerando el cuerpo libre del ensamble completo, se tiene que

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \qquad R_A(0.75\text{ m}) - R_B(0.3\text{ m}) = 0 \qquad R_A = 0.4R_B \tag{1}$$

Deformaciones. Se utiliza el método de superposición, considerando a $\mathbf{R}_B$ como redundante. Con el apoyo en *B* retirado, la elevación de temperatura en el cilindro provoca que el punto *B* se mueva hacia abajo δ_T. La reacción $\mathbf{R}_B$ debe causar una deflexión δ_1 igual a δ_T para que la deflexión final de *B* sea cero (figura 3).

Deflexión δ_T. Debido a la elevación de temperatura de $50° - 20° = 30$°C, la longitud del cilindro de latón aumenta en δ_T.

$$\delta_T = L(\Delta T)\alpha = (0.3\text{ m})(30°\text{C})(20.9 \times 10^{-6}/°\text{C}) = 188.1 \times 10^{-6}\text{ m} \downarrow$$



Deflexión δ_1. Se advierte que $\delta_D = 0.4\delta_C$ y que $\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D}$.

$$\delta_C = \frac{R_A L}{AE} = \frac{R_A(0.9\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.022\text{ m})^2(200\text{ GPa})} = 11.84 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_D = 0.40\delta_C = 0.4(11.84 \times 10^{-9} R_A) = 4.74 \times 10^{-9} R_A \uparrow$$

$$\delta_{B/D} = \frac{R_B L}{AE} = \frac{R_B(0.3\text{ m})}{\frac{1}{4}\pi(0.03\text{ m})^2(105\text{ GPa})} = 4.04 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

De la ecuación (1) se tiene que $R_A = 0.4R_B$ y se escribe

$$\delta_1 = \delta_D + \delta_{B/D} = [4.74(0.4R_B) + 4.04R_B]10^{-9} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \uparrow$$

Pero $\delta_T = \delta_1$: $\qquad 188.1 \times 10^{-6}\text{ m} = 5.94 \times 10^{-9} R_B \qquad R_B = 31.7\text{ kN}$

Esfuerzo en el cilindro: $\sigma_B = \dfrac{R_B}{A} = \dfrac{31.7\text{ kN}}{\frac{1}{4}\pi(0.03)^2}$ $\qquad \sigma_B = 44.8\text{ MPa}$ ◀

PROBLEMAS

2.33 Una barra de 250 mm de largo con una sección transversal rectangular de 15 × 30 mm consiste en dos capas de aluminio con 5 mm de grosor, unidas a una capa central de latón del mismo grosor. Si la barra está sujeta a fuerzas céntricas de magnitud $P = 30$ kN, y se sabe que $E_{al} = 70$ Gpa y $E_l = 105$ GPa, determine el esfuerzo normal *a*) en las capas de aluminio, *b*) en la capa de latón.

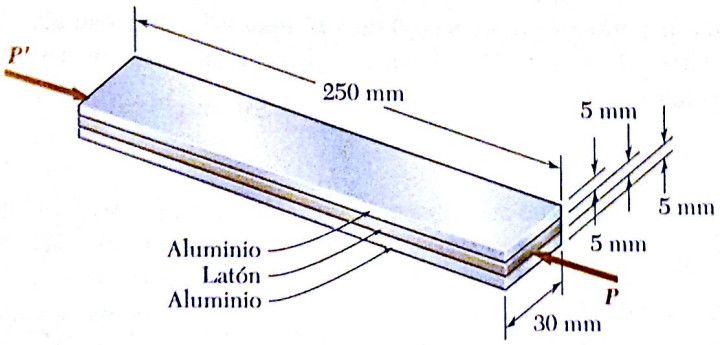


Figura *P2.33*

2.34 Determine la deformación de la barra compuesta del problema 2.33 si se somete a fuerzas céntricas de magnitud $P = 45$ kN.

2.35 En el ensamble que se muestra en la figura se aplican por medio de placas rígidas fuerzas céntricas de compresión de 40 kips en ambos extremos. Si se sabe que $E_{ac} = 29 \times 10^6$ psi y $E_{al} = 10.1 \times 10^6$ psi, determine *a*) los esfuerzos normales en el núcleo de acero y en la coraza de aluminio, *b*) la deformación del ensamble.

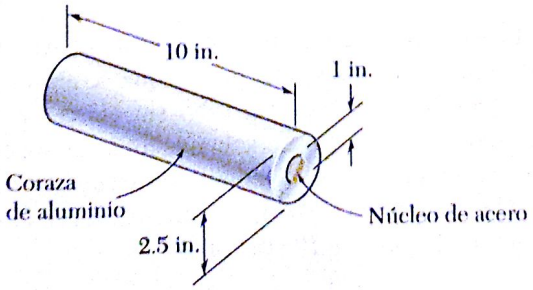


Figura P2.35

2.36 La longitud del ensamble mostrado disminuye 0.006 in. cuando se aplica una fuerza axial en los extremos por medio de placas rígidas. Determine *a*) la magnitud de la fuerza aplicada, *b*) el esfuerzo correspondiente en el núcleo de acero.

2.37 El poste de concreto de 1.5 m está reforzado con seis barras de acero, cada una con un diámetro de 28 mm. Si se sabe que $E_a = 200$ GPa y $E_c = 25$ GPa, determine los esfuerzos normales en el acero y en el concreto cuando se aplica al poste una carga céntrica axial **P** de 1 550 kN.

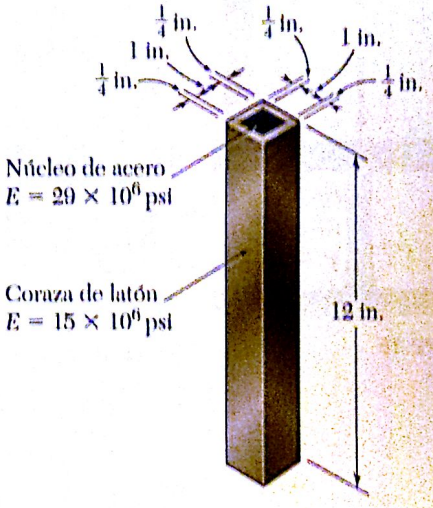


Figura P2.36

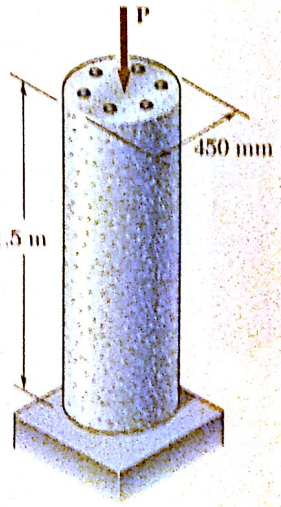


Figura P2.37

2.38 Para el poste del problema 2.37, determine la carga céntrica máxima que puede aplicarse si el esfuerzo normal permisible es de 160 MPa en el acero y 18 MPa en el concreto.

2.39 Tres varillas de acero ($E = 200$ GPa) soportan una carga **P** de 36 kN. Cada una de las varillas *AB* y *CD* tiene un área de sección transversal de 200 mm^2 y la varilla *EF* tiene un área de sección transversal de 625 mm^2. Despreciando la deformación de la varilla *BED* determine *a*) el cambio de longitud en la varilla *EF* y *b*) el esfuerzo en cada varilla.

2.40 Se emplean tres alambres para suspender la placa que se muestra en la figura. Se utilizan alambres de aluminio en *A* y en *B* con un diámetro de $\frac{1}{8}$ in. y se usa alambre de acero en *C* con un diámetro de $\frac{1}{12}$ in. Si se sabe que el esfuerzo permisible para el aluminio ($E = 10.4 \times 10^6$ psi) es de 14 ksi y que el esfuerzo permisible para el acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) es de 18 ksi, determine la máxima carga **P** que puede aplicarse.

2.41 Dos varillas cilíndricas, una de acero y la otra de latón se unen en *C* y están restringidas por soportes rígidos en *A* y en *E*. Para la carga mostrada y sabiendo que $E_a = 200$ GPa y $E_l = 105$ GPa, determine *a*) las reacciones en *A* y en *E*, *b*) la deflexión del punto *C*.

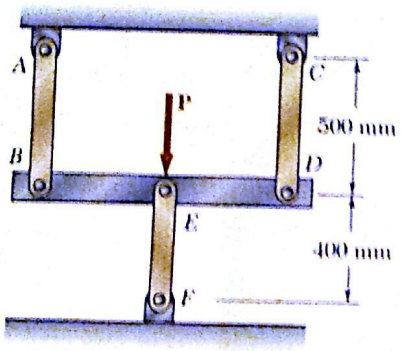


Figura P2.39

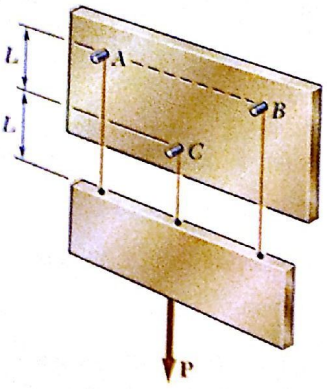


Figura P2.40

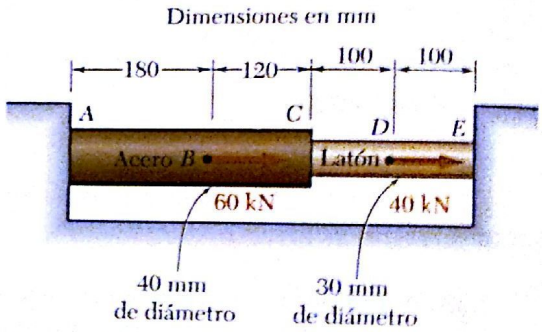


Figura P2.41

2.42 Retome el problema 2.41, y ahora suponga que la varilla *AC* está hecha de latón y que la varilla *CE* está hecha de acero.

2.43 Un tubo de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) con diámetro exterior de $1\frac{1}{4}$ in. y un espesor de pared de $\frac{1}{8}$ in. se coloca en una prensa que se ajusta de tal manera que sus quijadas apenas toquen los extremos del tubo sin ejercer presión sobre ellos. Luego, las dos fuerzas mostradas se aplican sobre el tubo. Después de la aplicación de estas fuerzas, la prensa se ajusta para disminuir la distancia entre sus quijadas en 0.008 in. Determine *a*) las fuerzas ejercidas por la prensa sobre el tubo en *A* y en *D*, *b*) el cambio de longitud en la porción *BC* del tubo.

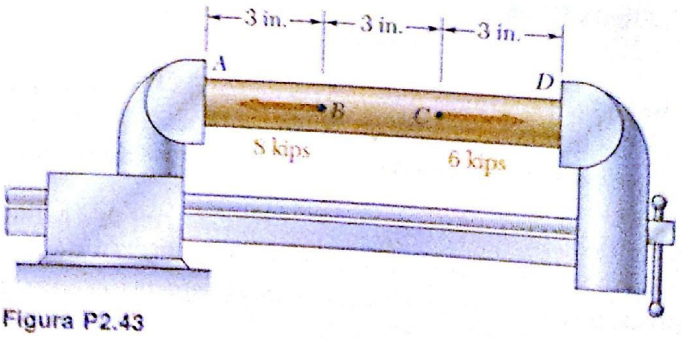


Figura P2.43

2.44 Retome el problema 2.43, y ahora suponga que, después de aplicar las fuerzas, la prensa se ajusta para disminuir la distancia entre sus quijadas a 0.004 in.

2.45 Los eslabones *BC* y *DE* están hechos de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y tienen $\frac{1}{2}$ in. de ancho y $\frac{1}{4}$ in. de espesor. Determine *a*) la fuerza en cada eslabón cuando se aplica una fuerza **P** de 600 lb sobre el elemento rígido *AF* como se muestra en la figura, y *b*) la deflexión correspondiente del punto *A*.

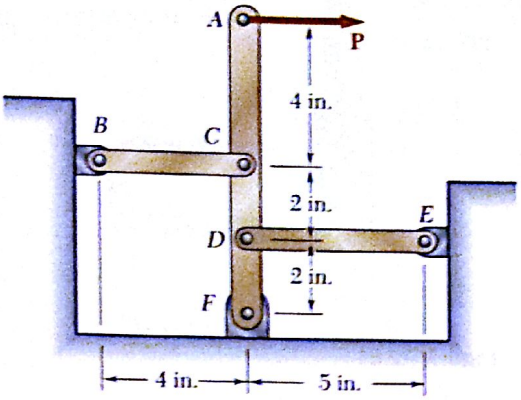


Figura *P2.45*

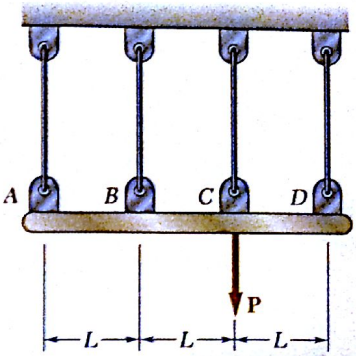


Figura P2.46

2.46 La barra rígida *ABCD* está suspendida de cuatro alambres idénticos como se muestra en la figura. Determine la tensión que causa en cada alambre la carga **P**.

2.47 La coraza de aluminio que se muestra en la figura está completamente unida al núcleo de latón, y el ensamble se encuentra libre de esfuerzo a una temperatura de 15°C. Considere sólo las deformaciones axiales y determine el esfuerzo en el aluminio cuando la temperatura alcanza 195°C.

2.48 Retome el problema 2.47, y ahora suponga que el núcleo está hecho de acero ($E = 200$ GPa, $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$/°C) en vez de latón.

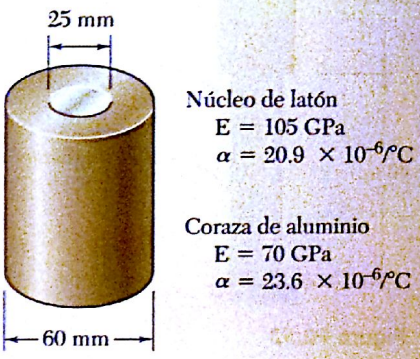


Figura P2.47

2.49 Un poste de concreto de 4 ft está reforzado con cuatro varillas de acero, cada una de $\frac{3}{4}$ in. de diámetro. Si se sabe que $E_a = 29 \times 10^6$ psi, $\alpha_a = 6.5 \times 10^{-6}$/°F y $E_c = 3.6 \times 10^6$ psi y $\alpha_c = 5.5 \times 10^{-6}$/°F, determine los esfuerzos normales que se inducen en el acero y en el concreto debido a una elevación en la temperatura de 80°F.

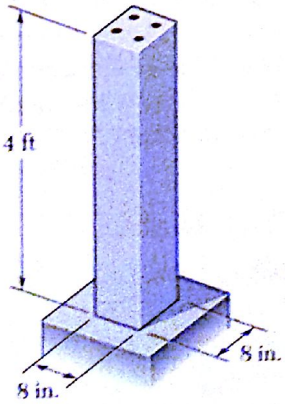


Figura *P2.49*

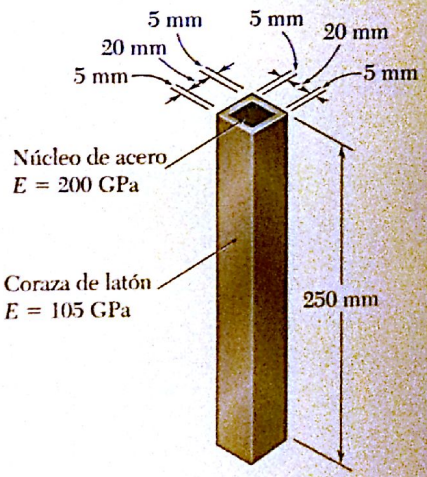


Figura P2.50

2.50 La coraza de latón ($\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}$/°C) está unida por completo al núcleo de acero ($\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}$/°F). Determine el incremento máximo permisible en temperatura si el esfuerzo en el núcleo de acero no debe exceder de 55 MPa.

2.51 Una varilla que consiste en dos porciones cilíndricas *AB* y *BC* está restringida en ambos extremos. La porción *AB* es de acero (E_a = 200 GPa, α_a = 11.7 × 10^{-6}/°C), y la porción *BC* está hecha de latón (E_l = 105 GPa, α_l = 20.9 × 10^{-6}/°C). Si se sabe que la varilla se encuentra inicialmente sin esfuerzos, determine la fuerza de compresión inducida en *ABC* cuando la temperatura se eleva 50°C.

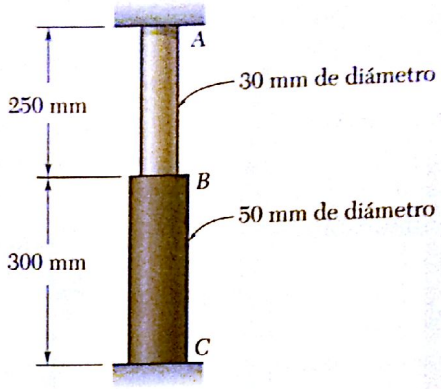


Figura P2.51

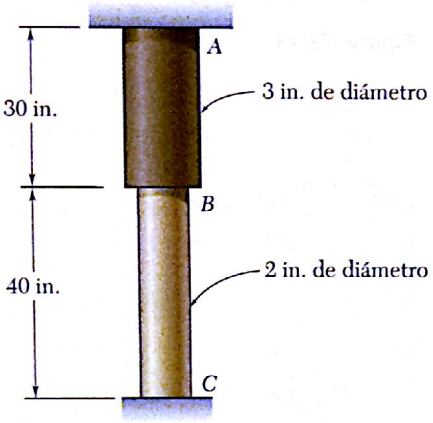


Figura P2.52

2.52 Una varilla de dos porciones cilíndricas *AB* y *BC* está restringida en ambos extremos. La porción *AB* es de latón (E_l = 15 × 10^6 psi, α_l = 11.6 × 10^{-6}/°F) y la porción *BC* es de acero (E_a = 29 × 10^6 psi, α_a = 6.5 × 10^{-6}/°F). Si se sabe que la varilla está inicialmente sin esfuerzos, determine *a*) los esfuerzos normales inducidos en las porciones *AB* y *BC* por una elevación de temperatura de 90°F, *b*) la deflexión correspondiente del punto *B*.

2.53 Retome el problema 2.52, y ahora suponga que la porción *AB* de la varilla compuesta está hecha de acero y que la porción *BC* es de latón.

2.54 Una vía de acero para ferrocarril (E_a = 29 × 10^6 psi, α_a = 6.5 × 10^{-6}/°F) fue tendida a una temperatura de 30°F. Determine el esfuerzo normal en los rieles cuando la temperatura alcance 125°F, si los rieles *a*) están soldados para formar una vía continua, *b*) tienen 39 ft de longitud con separaciones de $\frac{1}{4}$ in. entre ellos.

2.55 Dos barras de acero (E_a = 200 GPa, α_a = 11.7 × 10^{-6}/°C) se emplean para reforzar una barra de latón (E_l = 105 GPa, α_l = 20.9 × 10^{-6}/°C) que está sujeta a una carga *P* = 25 kN. Cuando se fabricaron las barras de acero, la distancia entre los centros de los agujeros que debían ajustarse a los pasadores se redujo 0.5 mm en relación con los 2 m que se necesitaban. Por ello las barras de acero se colocaron en un horno para aumentar su longitud, con el fin de que se ajustaran a los pasadores. Después de este proceso, la temperatura de las barras de acero se redujo a la temperatura ambiente. Determine *a*) el incremento en la temperatura que hizo posible que la barra de acero se ajustara a los pasadores, *b*) el esfuerzo en la barra de latón después de aplicar la carga sobre ella.

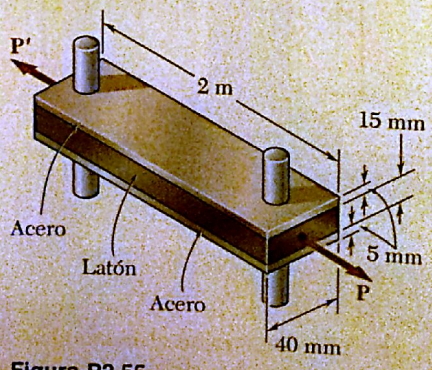


Figura P2.55

2.56 Determine la carga máxima P que puede aplicarse a la barra del problema 2.55, si el esfuerzo permisible en las barras de acero es de 30 MPa y el esfuerzo permisible en la barra de latón es de 25 MPa.

2.57 Un eslabón de latón (E_l = 105 GPa, $\alpha_l = 20.9 \times 10^{-6}/°C$) y una varilla de acero (E_a = 200 GPa, $\alpha_a = 11.7 \times 10^{-6}/°C$) a una temperatura de 20°C tienen las dimensiones que se muestran en la figura. La varilla de acero se enfría hasta que ajusta con libertad en el eslabón de latón. La temperatura de todo el ensamble se eleva entonces a 45°C. Determine *a*) el esfuerzo final en la varilla de acero, *b*) la longitud final de la varilla de acero.

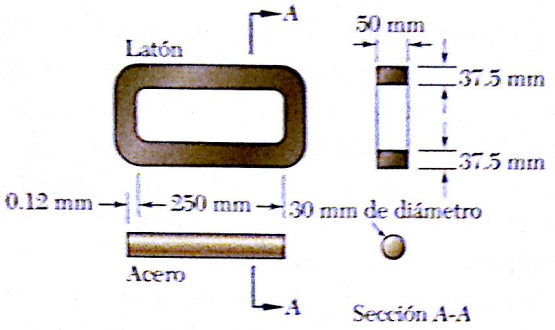
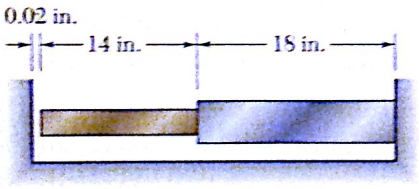


Figura *P2.57*

2.58 Si se sabe que existe una separación de 0.02 in. cuando la temperatura es de 75°F, determine *a*) la temperatura en que el esfuerzo normal de la barra de aluminio será igual a −11 ksi, *b*) la longitud exacta correspondiente de la barra de aluminio.

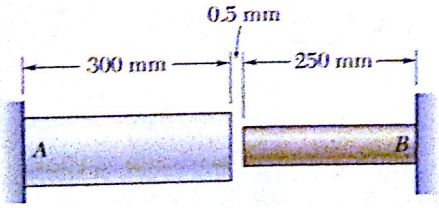


Bronce	Aluminio
$A = 2.4$ in.^{2}	$A = 2.8$ in.^{2}
$E = 15 \times 10^6$ psi	$E = 10.6 \times 10^6$ psi
$\alpha = 12 \times 10^{-6}/°F$	$\alpha = 12.9 \times 10^{-6}/°F$

Figura P2.58 y P2.59

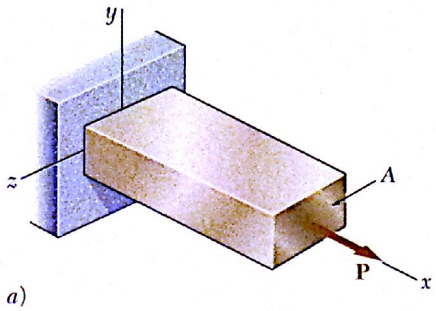
2.59 Determine *a*) la fuerza de compresión en las barras mostradas después de una elevación en la temperatura de 180°F, *b*) el cambio correspondiente en la longitud de la barra de bronce.

2.60 A temperatura ambiente (20°C) hay un espacio de 0.5 mm entre los extremos de las varillas mostradas en la figura. Posteriormente, cuando la temperatura alcanza 140°C, determine *a*) el esfuerzo normal en la varilla de aluminio, *b*) el cambio de longitud de la varilla de aluminio.

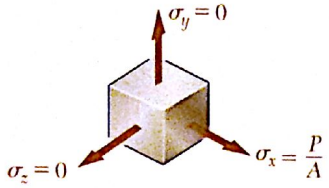


Aluminio	Acero inoxidable
$A = 2\,000$ mm^2	$A = 800$ mm^2
$E = 75$ GPa	$E = 190$ GPa
$\alpha = 23 \times 10^{-6}/°C$	$\alpha = 17.3 \times 10^{-6}/°C$

Figura *P2.60*



a)



b)

Figura 2.39

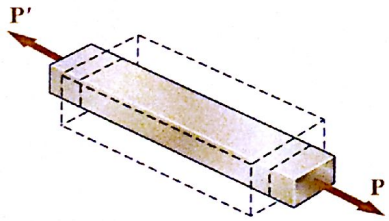


Figura 2.40

2.11 RELACIÓN DE POISSON

En la sección anterior de este capítulo se estudió que cuando una barra esbelta homogénea se carga axialmente, el esfuerzo y la deformación unitaria resultantes satisfacen la ley de Hooke, siempre y cuando no se exceda el límite elástico del material. Suponiendo que la carga **P** está dirigida a lo largo del eje x (figura 2.39*a*), se tiene que $\sigma_x = P/A$, donde A es el área de la sección transversal de la barra. Por la ley de Hooke,

$$\epsilon_x = \sigma_x/E \tag{2.24}$$

donde E es el módulo de elasticidad del material.

También se advierte que los esfuerzos normales de las caras perpendiculares a los ejes y y z son cero: $\sigma_y = \sigma_z = 0$ (figura 2.39*b*). Parecería lógico concluir que las deformaciones correspondientes ϵ_y y ϵ_z también son cero. Esto, sin embargo, *no es el caso*. En todos los materiales de ingeniería, la elongación que produce una fuerza axial de tensión **P** en la dirección de la fuerza se acompaña de una contracción en cualquier dirección transversal (figura 2.40).† En esta sección y en las siguientes (secciones 2.12 a 2.15), se supondrá que todos los materiales considerados son *homogéneos* e *isotrópicos*, es decir, se supondrá que sus propiedades mecánicas son independientes tanto de la *posición* como de la *dirección*. Esto significa que la deformación unitaria debe tener el mismo valor para cualquier dirección transversal. Por lo tanto, para la carga mostrada en la figura 2.39 debe tenerse que $\epsilon_y = \epsilon_z$. Este valor se conoce como *deformación lateral*. Una constante importante para un material dado es su *relación de Poisson*, llamada así en honor al matemático francés Siméon Denis Poisson (1781-1840), y que se denota con la letra griega ν (nu). Se define como

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \tag{2.25}$$

o

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.26}$$

para la condición de carga representada en la figura 2.39. Note el uso de un signo menos en las ecuaciones anteriores para obtener un valor positivo de ν, las deformaciones axiales y laterales de todos los materiales de ingeniería tienen signos opuestos.‡ Resolviendo la ecuación (2.26) para encontrar ϵ_y y ϵ_z, y utilizando la ecuación (2.24), se escriben las siguientes relaciones, que describen completamente las condiciones de deformación bajo una carga axial aplicada en una dirección paralela al eje x:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.27}$$

† Sería tentador, pero igualmente erróneo, suponer que el volumen de la varilla permanece sin cambio como resultado del efecto combinado de la deformación axial y de la contracción transversal (véase sección 2.13).

‡ Sin embargo, algunos materiales experimentales, como las espumas poliméricas, se expanden lateralmente cuando se estiran. Como las deformaciones axial y lateral tienen el mismo signo, la relación de Poisson de estos materiales es negativa. (Véase Roderic Lakes, "Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio", en *Science*, 27 de febrero de 1987, volumen 235, pp. 1038-1040.)

EJEMPLO 2.07

Se observa que una varilla de 500 mm de longitud y 16 mm de diámetro, elaborada con un material homogéneo e isotrópico, aumenta su longitud en 300 μm y reduce su diámetro en 2.4 μm al sometérsele a una carga axial de 12 kN. Determine el módulo de elasticidad y la relación de Poisson del material.

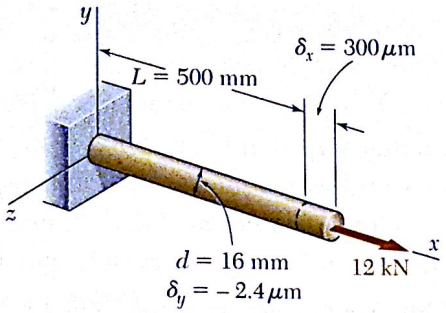


Figura 2.41

El área de la sección transversal de la varilla es

$$A = \pi r^2 = \pi(8 \times 10^{-3}\,\text{m})^2 = 201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

Eligiendo el eje x a lo largo del eje de la varilla (véase figura 2.41), se tiene que

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{12 \times 10^3\,\text{N}}{201 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 59.7\,\text{MPa}$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{L} = \frac{300\,\mu\text{m}}{500\,\text{mm}} = 600 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{d} = \frac{-2.4\,\mu\text{m}}{16\,\text{mm}} = -150 \times 10^{-6}$$

De la ley de Hooke, $\sigma_x = E\epsilon_x$, se obtiene

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{59.7\,\text{MPa}}{600 \times 10^{-6}} = 99.5\,\text{GPa}$$

y de la ecuación (2.26),

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{-150 \times 10^{-6}}{600 \times 10^{-6}} = 0.25$$

2.12 CARGA MULTIAXIAL. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Todos los ejemplos considerados hasta el momento en este capítulo han tratado con elementos esbeltos sujetos a cargas axiales, es decir, con fuerzas dirigidas a lo largo de un solo eje. Eligiendo este eje como el eje x, y denotando con P la fuerza interna en un lugar dado, las componentes correspondientes de los esfuerzos fueron $\sigma_x = P/A$, $\sigma_y = 0$ y $\sigma_z = 0$.

Considere ahora elementos estructurales sometidos a cargas que actúan en las direcciones de los tres ejes coordenados y que producen esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z, todos distintos de cero (figura 2.42). Esta condición se conoce como *carga multiaxial*. Advierta que ésta no es la condición generalizada de esfuerzos descrita en la sección 1.12, ya que no se incluyen esfuerzos cortantes entre los esfuerzos mostrados en la figura 2.42.

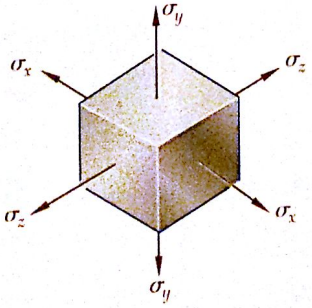


Figura 2.42

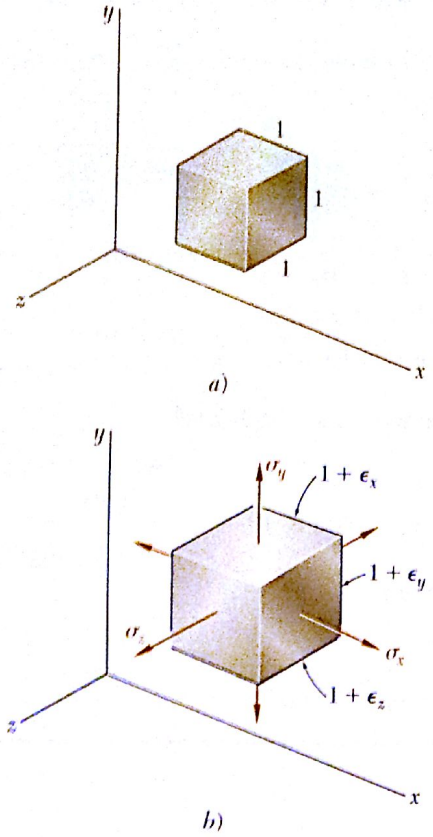


Figura 2.43

Sea un elemento de un material isotrópico con forma cúbica (figura 2.43*a*). Puede suponerse que el lado del cubo sea igual a la unidad, ya que siempre es posible seleccionar el lado del cubo como una unidad de longitud. Bajo la carga multiaxial determinada, el elemento se deformará hasta constituir un *paralelepípedo rectangular* de lados iguales $1 + \epsilon_x$, $1 + \epsilon_y$ y $1 + \epsilon_z$, donde ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z son los valores de la deformación normal en las direcciones de los tres ejes coordenados (figura 2.43*b*). Deberá advertirse que, como resultado de las deformaciones de los otros elementos del material, el elemento en consideración también puede sufrir una traslación, pero en este momento sólo interesa la *deformación real* del elemento, y no cualquier posible desplazamiento del cuerpo rígido.

Para expresar las componentes de la deformación ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z en términos de las componentes del esfuerzo σ_x, σ_y, σ_z, se considerará por separado el efecto de cada componente de esfuerzo y se combinarán los resultados obtenidos. El enfoque que se propone utilizar aquí se empleará repetidamente en este libro, y se basa en el *principio de superposición*, el cual dice que el efecto de una carga combinada dada sobre una estructura puede obtenerse *determinando*, en forma separada, *los efectos de las distintas cargas y combinando los resultados obtenidos*, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

1. Cada efecto está linealmente relacionado con la carga que lo produce.
2. La deformación resultante de cualquier carga dada es pequeña y no afecta las condiciones de aplicación de las otras cargas.

En el caso de una carga multiaxial, la primera condición será satisfecha si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad del material, y la segunda condición también se cumplirá si el esfuerzo en cualquier cara dada no causa deformaciones en las otras que sean lo suficientemente grandes para afectar el cálculo de los esfuerzos en esas caras.

Considerando primero el efecto de la componente de esfuerzo σ_x, recuerde de la sección 2.11 que σ_x causa una deformación igual a σ_x/E en la dirección de x y deformaciones iguales a $-\nu\sigma_x/E$ en las direcciones y y z. De manera similar, si la componente σ_y se aplica por separado, causará una deformación σ_y/E en la dirección y y deformaciones $-\nu\sigma_y/E$ en las otras dos direcciones. Finalmente la componente σ_z, si se aplica por separado, ocasionará una deformación unitaria σ_z/E en la dirección z y deformaciones $-\nu\sigma_z/E$ en las direcciones x y y. Combinando los resultados obtenidos, se concluye que las componentes de deformación correspondientes a la carga multiaxial dada son

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \tag{2.28}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

Las relaciones (2.28) se conocen como la *ley de Hooke generalizada para la carga multiaxial de un material isotrópico homogéneo*. Como ya se indicó, los resultados obtenidos son válidos sólo si los esfuerzos no exceden el límite de proporcionalidad, y en tanto las deformaciones involucradas sean pequeñas. Además, recuerde que un valor positivo para una componente de esfuerzo significa tensión, y un valor negativo significa compresión. De igual manera, un valor positivo para una componente de deformación indica expansión en la dirección correspondiente, y un valor negativo indica contracción.

EJEMPLO 2.08

El bloque de acero que muestra la figura 2.44 es sometido a presión uniforme en todas sus caras. Sabiendo que el cambio de longitud del borde AB es de -1.2×10^{-3} in., encuentre *a*) el cambio de longitud en los otros dos bordes, *b*) la presión p aplicada a las caras del bloque. Suponga $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.29$.

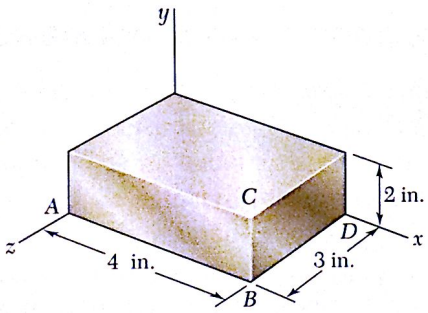


Figura 2.44

a) Cambio de longitud de los otros bordes. Sustituyendo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ en (2.28), se encuentra que las tres componentes de deformación tienen el valor común

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \tag{2.29}$$

Ya que

$$\epsilon_x = \delta_x/AB = (-1.2 \times 10^{-3} \text{ in.})/(4 \text{ in.})$$
$$= -300 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

se obtiene

$$\epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_x = -300 \times 10^{-6} \text{ in./in.}$$

de donde se sigue que

$$\delta_y = \epsilon_y(BC) = (-300 \times 10^{-6})(2 \text{ in.}) = -600 \times 10^{-6} \text{ in.}$$
$$\delta_z = \epsilon_z(BD) = (-300 \times 10^{-6})(3 \text{ in.}) = -900 \times 10^{-6} \text{ in.}$$

b) Presión. Despejando la ecuación (2.29) para encontrar p, se tiene que

$$p = -\frac{E\epsilon_x}{1 - 2\nu} = -\frac{(29 \times 10^6 \text{ psi})(-300 \times 10^{-6})}{1 - 0.58}$$
$$p = 20.7 \text{ ksi}$$

*2.13 DILATACIÓN. MÓDULO DE ELASTICIDAD VOLUMÉTRICO (O MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD)

En esta sección se examinará el efecto de los esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z sobre el volumen de un elemento de material isotrópico. Considere el elemento mostrado en la figura 2.43. En su estado no esforzado, tiene la forma de un cubo de volumen unitario, y bajo los esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z, se deforma en un paralelepípedo rectangular cuyo volumen es:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

Como las deformaciones ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z son mucho más pequeñas que la unidad, sus productos son más pequeños aún y pueden omitirse en la expansión del producto. Se tiene, entonces,

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

EJEMPLO 2.10

Un bloque rectangular de material con un módulo de rigidez $G = 90$ ksi se une a dos placas rígidas horizontales. La placa inferior está fija, mientras que la placa superior se somete a una fuerza horizontal **P** (figura 2.51). Sabiendo que la placa superior se mueve 0.04 in. bajo la acción de la fuerza, halle *a*) la deformación unitaria promedio a corte del material, *b*) la fuerza **P** ejercida sobre la placa superior.

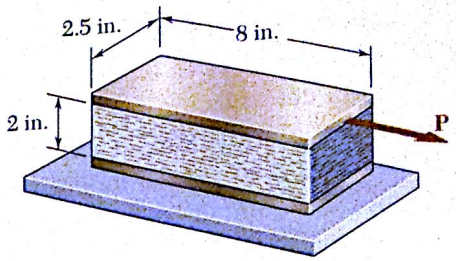


Figura 2.51

a) Deformación unitaria a corte. Se seleccionan ejes coordenados centrados en el punto medio *C* del borde *AB* y dirigidos como se muestra en la figura 2.52. De acuerdo con su definición, la deformación unitaria bajo cortante γ_{xy} es igual al ángulo formado por la vertical y por la línea *CF* que une los puntos medios de los bordes *AB* y *DE*. Advirtiendo que es un ángulo muy pequeño y recordando que debe expresarse en radianes, se escribe

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in.}}{2 \text{ in.}} \qquad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

b) Fuerza ejercida sobre la placa superior. Primero se determina el esfuerzo cortante τ_{xy} en el material. Utilizando la ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria, se tiene que

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = (90 \times 10^3 \text{ psi})(0.020 \text{ rad}) = 1\,800 \text{ psi}$$

La fuerza ejercida sobre la placa superior es, por lo tanto,

$$P = \tau_{xy} A = (1\,800 \text{ psi})(8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.}) = 36.0 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P = 36.0 \text{ kips}$$

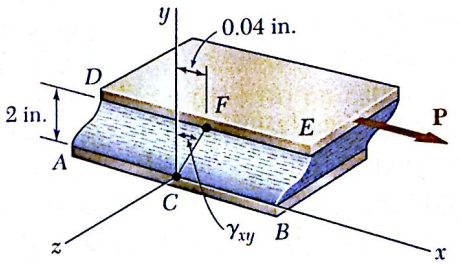


Figura 2.52

2.15 ANÁLISIS ADICIONAL DE LAS DEFORMACIONES BAJO CARGA AXIAL. RELACIÓN ENTRE *E*, *ν* Y *G*

En la sección 2.11 se estudió que una barra delgada sometida a una carga axial de tensión **P** dirigida a lo largo del eje *x* se alargará en la dirección *x* y se contraerá en ambas direcciones transversales *y* y *z*. Si ϵ_x es la deformación axial, la deformación lateral es expresada como $\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu\epsilon_x$, donde ν es la relación de Poisson. Así, un elemento en la forma de un cubo con un lado igual a uno y orientado como se muestra en la figura 2.53*a* se deformará como un paralelepípedo rectangular de lados $1 + \epsilon_x$, $1 - \nu\epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. (Note que sólo una cara del elemento se muestra en la figura.) Por otra parte, si el elemento está orientado a 45° de la carga, se observa que la cara mostrada en la figura se deforma como un rombo. Se concluye que la carga axial **P** causa en este elemento una deformación cortante γ' igual a la cantidad por la que cada uno de los ángulos que muestra la figura 2.53*b* aumenta o disminuye.†

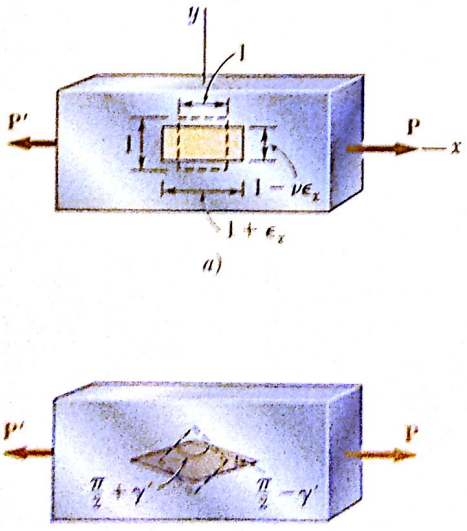
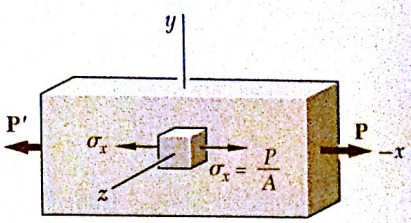


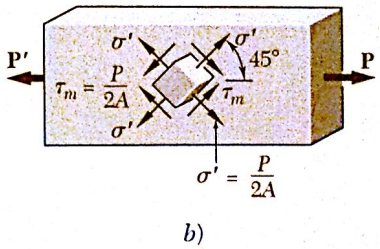
Figura 2.53

† Observe que la carga **P** también produce deformaciones unitarias normales en el elemento que se muestra en la figura 2.53*b* (véase problema 2.74).

El hecho de que las deformaciones cortantes, además de las deformaciones normales, resulten de una carga axial no deberá sorprender, ya que al final de la sección 1.12 se ha observado que una carga axial **P** causa esfuerzos normales y cortantes de igual magnitud en cuatro de las caras de un elemento orientado a 45° del eje del miembro cargado. Este caso se ilustró en la figura 1.40, la que, por conveniencia, se repite aquí. En la sección 1.11, también se mostró que el esfuerzo cortante es máximo en un plano que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga. Se deduce de la ley de Hooke para los esfuerzos y deformaciones cortantes que la deformación a corte γ' asociada con el elemento de la figura 2.53*b* es también máxima: $\gamma' = \gamma_m$.

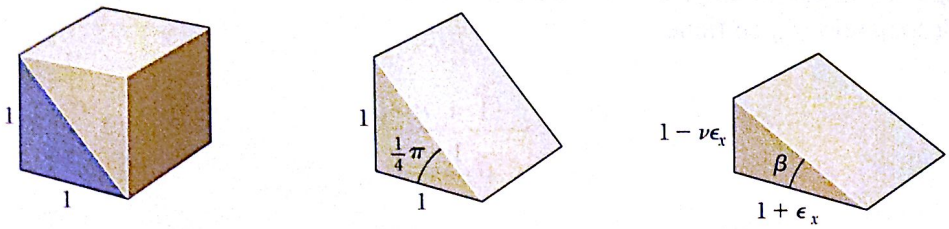


a)



b)

Figura 1.40 (repetida)



a) *b*) *c*)

Figura 2.54

Mientras un estudio más detallado de las transformaciones de la deformación se pospondrá hasta el capítulo 7, en esta sección se deducirá una relación entre la máxima deformación a corte $\gamma' = \gamma_m$ asociada con el elemento de la figura 2.53*b* y la deformación unitaria normal ϵ_x en la dirección de la carga. Considere para este propósito el elemento prismático obtenido de intersectar el elemento cúbico de la figura 2.53*a* con un plano diagonal (figura 2.54*a* y *b*). Refiriéndose a la figura 2.53*a*, se concluye que este nuevo elemento se deformará como el elemento de la figura 2.54*c*, que tiene lados horizontales y verticales respectivamente iguales a $1 + \epsilon_x$ y $1 - \nu\epsilon_x$. Pero el ángulo formado por las caras oblicuas y horizontales del elemento de la figura 2.54*b* es precisamente la mitad de uno de los ángulos rectos en el elemento cúbico considerado en la figura 2.53*b*. El ángulo β en el que se deforma este ángulo debe ser, por lo tanto, igual a la mitad de $\pi/2 - \gamma_m$. Se escribe

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_m}{2}$$

Aplicando la fórmula para la tangente de la diferencia de dos ángulos, se obtiene

$$\tan\beta = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma_m}{2}} = \frac{1 - \tan\frac{\gamma_m}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma_m}{2}}$$

o, como $\gamma_m/2$ es un ángulo muy pequeño,

$$\tan \beta = \frac{1 - \dfrac{\gamma_m}{2}}{1 + \dfrac{\gamma_m}{2}} \tag{2.39}$$

Pero, de la figura 2.54*c*, se observa que

$$\tan \beta = \frac{1 - \nu\epsilon_x}{1 + \epsilon_x} \tag{2.40}$$

Igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (2.39) y (2.40), y despejando γ_m, se tiene

$$\gamma_m = \frac{(1 + \nu)\epsilon_x}{1 + \dfrac{1 - \nu}{2}\epsilon_x}$$

Ya que $\epsilon_x \ll 1$, el denominador en la expresión obtenida puede suponerse igual a uno; se tiene, por lo tanto,

$$\gamma_m = (1 + \nu)\epsilon_x \tag{2.41}$$

que es la relación deseada entre la máxima deformación unitaria a corte γ_m y la deformación axial ϵ_x.

Para obtener una relación entre las constantes E, ν y G, se recuerda que, por la ley de Hooke, $\gamma_m = \tau_m/G$ y que, para una carga axial, $\epsilon_x = \sigma_x/E$. La ecuación (2.41) puede escribirse entonces como

$$\frac{\tau_m}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{E}$$

o

$$\frac{E}{G} = (1 + \nu)\frac{\sigma_x}{\tau_m} \tag{2.42}$$

De la figura 1.40, se sabe que $\sigma_x = P/A$ y que $\tau_m = P/2A$, donde A es el área de la sección transversal del miembro. Por lo tanto, se tiene que $\sigma_x/\tau_m = 2$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2.42) y dividiendo ambos miembros entre 2, se obtiene la relación

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \tag{2.43}$$

que puede usarse para determinar una de las constantes E, ν o G a partir de las otras dos. Por ejemplo, despejando G de la ecuación (2.43), se tiene que

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{2.43'}$$

*2.16 RELACIONES DE ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA MATERIALES COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS

Los materiales compuestos reforzados con fibras se analizaron brevemente en la sección 2.5. En ese momento se explicó que estos materiales se obtienen encapsulando fibras de un material resistente y rígido en un material más débil y blando, que se conoce como *matriz*. También se dijo que la relación entre el esfuerzo normal y la corriente deformación unitaria normal creada en una lámina o capa de un material compuesto depende de la dirección en que se aplica la carga. Diferentes módulos de elasticidad E_x, E_y y E_z se requieren, pues, para describir la relación entre el esfuerzo normal y la deformación normal, de acuerdo a si la carga se aplica en una dirección paralela a las fibras, en una dirección perpendicular a la capa, o en la dirección transversal.

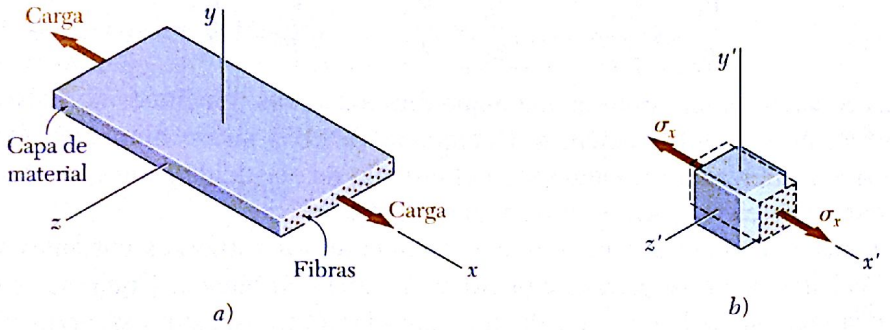


Figura 2.55

Se considera de nuevo la capa de material compuesto analizada en la sección 2.5 y se le someterá a una carga uniaxial de tensión paralela a sus fibras, es decir, en la dirección x (figura 2.55*a*). Para simplificar el análisis, se supondrá que las propiedades de las fibras y de la matriz han sido combinadas en un material homogéneo ficticio equivalente que posee estas propiedades combinadas. Considere ahora un pequeño elemento de esa capa de material combinado (figura 2.55*b*). Se denota con σ_x el esfuerzo normal correspondiente y se observa que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Como se indicó en la sección 2.5, la deformación normal correspondiente en la dirección x es $\epsilon_x = \sigma_x/E_x$, donde E_x es el módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección x. Como se vio para los materiales isotrópicos, la elongación del material en la dirección x se acompaña de contracciones en las direcciones y y z. Tales contracciones dependen de la colocación de las fibras en la matriz y generalmente serán diferentes. Se deduce que las deformaciones laterales ϵ_y y ϵ_z también serán diferentes, así como también lo serán las relaciones de Poisson correspondientes:

$$\nu_{xy} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \qquad \text{y} \qquad \nu_{xz} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \tag{2.44}$$

Observe que el primer subíndice en cada una de las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{xz} en las ecuaciones (2.44) se refiere a la dirección de la carga, y el segundo a la dirección de la contracción.

De lo anterior se deduce que, en el caso de una *carga multiaxial* de una capa de material compuesto, pueden utilizarse ecuaciones similares a las ecuaciones (2.28) de la sección 2.12 para describir la relación esfuerzo-deforma-

ción. En el presente caso, no obstante, se involucrarán tres valores diferentes del módulo de elasticidad y seis valores de la relación de Poisson. Se escribe

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zx}\sigma_z}{E_z}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{zy}\sigma_z}{E_z} \tag{2.45}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z}$$

Puede considerarse que las ecuaciones (2.45) definen la transformación del esfuerzo en deformación para una capa dada. Se deduce de la propiedad general de dicha transformación que los coeficientes de las componentes de esfuerzo son simétricos, es decir, que

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y} \qquad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \qquad \frac{\nu_{zx}}{E_z} = \frac{\nu_{xz}}{E_x} \tag{2.46}$$

Estas ecuaciones muestran que, aunque diferentes, las relaciones de Poisson ν_{xy} y ν_{yx} no son independientes. Cualquiera de ellas puede obtenerse de la otra si los valores correspondientes del módulo de elasticidad son conocidos. Lo mismo es cierto para ν_{yz} y ν_{zy} y para ν_{zx} y ν_{xz}.

Considere ahora el efecto de la presencia de los esfuerzos cortantes sobre las caras de un pequeño elemento de la capa combinada. Como se señaló en la sección 2.14 en el caso de materiales isotrópicos, estos esfuerzos vienen en pares de vectores iguales y opuestos aplicados a lados opuestos del elemento dado y no tienen efecto sobre las deformaciones normales. Por lo tanto, las ecuaciones (2.45) permanecen válidas. Sin embargo, los esfuerzos cortantes, crearán deformaciones a corte que se definen por ecuaciones similares a las últimas tres de las ecuaciones (2.38) de la sección 2.14, excepto que ahora deben utilizarse tres diferentes valores del módulo de rigidez, G_{xy}, G_{yz} y G_{zx}. Se tiene que

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \tag{2.47}$$

El hecho de que las tres componentes de deformación ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z se expresen sólo en términos de los esfuerzos normales y no dependan de cualesquiera de los esfuerzos cortantes, caracteriza a los *materiales ortotrópicos* y los distingue de otros materiales anisotrópicos.

Como se vio en la sección 2.5, un *laminado* plano se obtiene superponiendo un cierto número de capas o láminas. Si las fibras en todas las capas reciben la misma orientación para resistir mejor una carga axial de tensión, el laminado mismo será ortotrópico. Si la estabilidad lateral del laminado se incrementa colocando algunas de sus capas de tal manera que sus fibras estén en ángulo recto con las fibras de las otras capas, el laminado resultante también será ortotrópico. Por otra parte, si alguna de las capas de un laminado se coloca de tal manera que sus fibras no sean ni paralelas ni perpendiculares a las fibras de las otras capas, el laminado, en general, no será ortotrópico.†

† Para más información sobre materiales compuestos reforzados con fibras, véase Hyer, M. W., *Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials*, McGraw-Hill, Nueva York, 1998.

EJEMPLO 2.11

Un cubo de 60 mm, elaborado con epóxico reforzado con fibras de grafito con las fibras alineadas en la dirección x, se sujeta a una carga compresiva de 140 kN en la dirección x. Las propiedades del material compuesto son: $E_x = 155.0$ GPa, $E_y = 12.10$ GPa, $E_z = 12.10$ GPa, $\nu_{xy} = 0.248$, $\nu_{xz} = 0.248$ y $\nu_{yz} = 0.458$. Encuentre los cambios en las dimensiones del cubo, sabiendo que *a*) el cubo es libre de expandirse en las direcciones y y z (figura 2.56); *b*) el cubo es libre de expandirse en la dirección z, pero está restringido de expandirse en la dirección y por dos placas fijas sin fricción (figura 2.57).

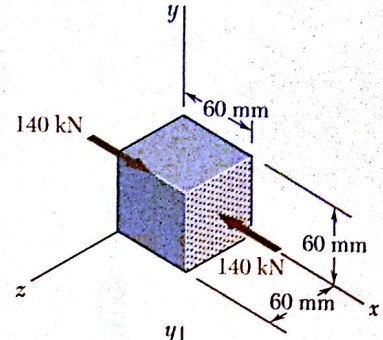


Figura 2.56

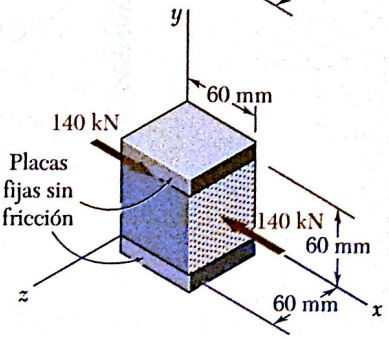


Figura 2.57

a) Libre en las direcciones y y z. Primero se determina el esfuerzo σ_x en la dirección de la carga. Se tiene que

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{-140 \times 10^3 \text{ N}}{(0.060 \text{ m})(0.060 \text{ m})} = -38.89 \text{ MPa}$$

Como el cubo no está cargado ni restringido en las direcciones y y z, se tiene que $\sigma_y = \sigma_z = 0$. Así, los miembros de la derecha de las ecuaciones (2.45) se reducen a sus primeros términos. Sustituyendo los datos recibidos en estas ecuaciones, se escribe

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} = -250.9 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} = -\frac{(0.248)(-38.69 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} = +62.22 \times 10^{-6}$$

Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones unitarias correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m del lado del cubo:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-250.9 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -15.05 \ \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \ \mu\text{m}$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+62.2 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +3.73 \ \mu\text{m}$$

b) Libre en la dirección z, restringido en la dirección y. El esfuerzo en la dirección x es el mismo que en la parte *a*, es decir, $\sigma_x = -38.89$ MPa. Puesto que el cubo es libre de expandirse en la dirección z como en la parte *a*, de nuevo se tiene $\sigma_z = 0$. Pero ya que el cubo está ahora restringido en la dirección y, se debe esperar un esfuerzo σ_y diferente de cero. Por otra parte, debido a que el cubo no puede expandirse en la dirección y, debe tenerse $\delta_y = 0$ y, por lo tanto, $\epsilon_y = \delta_y/L = 0$. Haciendo $\sigma_z = 0$ y $\epsilon_y = 0$ en la segunda de las ecuaciones (2.45), despejando esa ecuación para σ_y y sustituyendo los datos recibidos se tiene que

$$\sigma_y = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy}\sigma_x = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248)(-38.89 \text{ MPa})$$

$$= -752.9 \text{ kPa}$$

Ahora que las tres componentes del esfuerzo se han determinado, se utilizarán la primera y la última de las ecuaciones (2.45) para calcular las componentes de deformación ϵ_x y ϵ_z. Pero la primera de estas ecuaciones contiene la relación de Poisson ν_{yx} y, como se vio antes, esta razón *no es igual* a la relación ν_{xy} que estuvo entre los datos recibidos. Para calcular ν_{yx} se emplea la primera de las ecuaciones (2.46) y se escribe

$$\nu_{yx} = \left(\frac{E_y}{E_x}\right)\nu_{xy} = \left(\frac{12.10}{155.0}\right)(0.248) = 0.01936$$

Haciendo a $\sigma_z = 0$ en la primera y en la tercera ecuaciones (2.45) y sustituyendo en ellas los valores dados de E_x, E_y, ν_{xz} y ν_{yz}, así como los valores obtenidos de σ_x, σ_y y ν_{yx}, se tiene

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yx}\sigma_y}{E_y} = \frac{-38.89 \text{ MPa}}{155.0 \text{ GPa}} - \frac{(0.01936)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = -249.7 \times 10^{-6}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu_{xz}\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz}\sigma_y}{E_y} = -\frac{(0.248)(-38.89 \text{ MPa})}{155.0 \text{ GPa}} - \frac{(0.458)(-752.9 \text{ kPa})}{12.10 \text{ GPa}} = +90.72 \times 10^{-6}$$

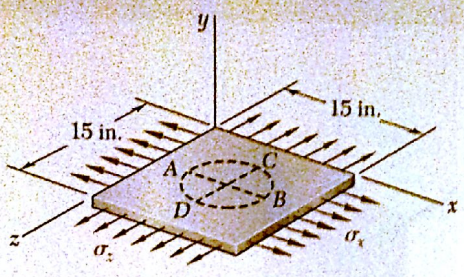
Los cambios en las dimensiones del cubo se obtienen multiplicando las deformaciones correspondientes por la longitud $L = 0.060$ m de la arista del cubo:

$$\delta_x = \epsilon_x L = (-249.7 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = -14.98 \ \mu\text{m}$$

$$\delta_y = \epsilon_y L = (0)(0.060 \text{ m}) = 0$$

$$\delta_z = \epsilon_z L = (+90.72 \times 10^{-6})(0.060 \text{ m}) = +5.44 \ \mu\text{m}$$

Al comparar los resultados de las partes *a* y *b*, se advierte que la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación δ_x en la dirección de las fibras es despreciable. No obstante, la diferencia entre los valores obtenidos para la deformación lateral δ_z no es despreciable. Esta deformación es claramente mayor cuando el cubo se restringe de deformarse en la dirección y.



PROBLEMA MODELO 2.5

Un círculo con diámetro $d = 9$ in., cuyo espesor es $t = \frac{3}{4}$ in., se marca en una placa de aluminio sin esforzar. Las fuerzas que actúan después en el plano de la placa causan esfuerzos normales $\sigma_x = 12$ ksi y $\sigma_z = 20$ ksi. Para $E = 10 \times 10^6$ psi y $\nu = \frac{1}{3}$, determine el cambio en *a*) la longitud del diámetro AB, *b*) la longitud del diámetro CD, *c*) el espesor de la placa, *d*) el volumen de la placa.

SOLUCIÓN

Ley de Hooke. Advierta que $\sigma_y = 0$. Utilizando las ecuaciones (2.28) se encuentra que la deformación en cada una de las direcciones coordenadas es

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[(12 \text{ ksi}) - 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = +0.533 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) + 0 - \frac{1}{3}(20 \text{ ksi})\right] = -1.067 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

$$= \frac{1}{10 \times 10^6 \text{ psi}}\left[-\frac{1}{3}(12 \text{ ksi}) - 0 + (20 \text{ ksi})\right] = +1.600 \times 10^{-3} \text{ in./in.}$$

***a*) Diámetro *AB*.** El cambio en longitud es $\delta_{B/A} = \epsilon_x d$.

$$\delta_{B/A} = \epsilon_x d = (+0.533 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(9 \text{ in.})$$

$$\delta_{B/A} = +4.8 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$

***b*) Diámetro *CD*.**

$$\delta_{C/D} = \epsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(9 \text{ in.})$$

$$\delta_{C/D} = +14.4 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$

***c*) Espesor.** Recordando que $t = \frac{3}{4}$ in., se tiene que

$$\delta_t = \epsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3} \text{ in./in.})(\tfrac{3}{4} \text{ in.})$$

$$\delta_t = -0.800 \times 10^{-3} \text{ in.} \blacktriangleleft$$

***e*) Volumen de la placa.** Utilizando la ecuación (2.30), se tiene que

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (+0.533 - 1.067 + 1.600)10^{-3} = +1.067 \times 10^{-3}$$

$$\Delta V = eV = +1.067 \times 10^{-3}[(15 \text{ in.})(15 \text{ in.})(\tfrac{3}{4} \text{ in.})] \quad \Delta V = +0.187 \times \text{in.}^3 \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

2.61 En un ensayo estándar a tensión se somete una varilla de aluminio de 20 mm de diámetro a una fuerza de tensión de $P = 30$ kN. Si $\nu = 0.35$ y $E = 70$ GPa, determine *a*) la elongación de la varilla en una longitud calibrada de 150 mm, *b*) el cambio en el diámetro de la varilla.

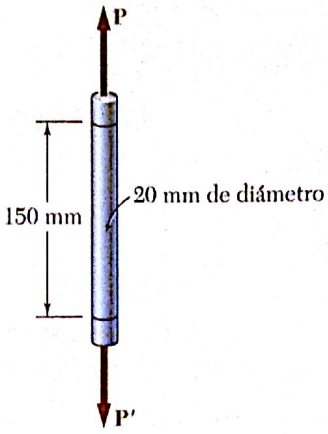


Figura *P2.61*

2.62 Una varilla con 20 mm de diámetro, hecha de un plástico experimental, se somete a una fuerza de tensión con una magnitud $P = 6$ kN. Puesto que se observa un alargamiento de 14 mm y una disminución en diámetro de 0.85 mm en una longitud calibrada de 150 mm, determine el módulo de elasticidad, el módulo de rigidez y la relación de Poisson para el material.

2.63 Una carga de tensión de 600 lb se aplica a una probeta elaborada con una placa plana de acero con $\frac{1}{16}$ in. de grosor ($E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$). Determine el cambio resultante *a*) en la longitud calibrada de 2 in., *b*) en el ancho de la porción *AB* de la probeta, *c*) en el grosor de la porción *AB*, *d*) en el área de la sección transversal de la porción *AB*.

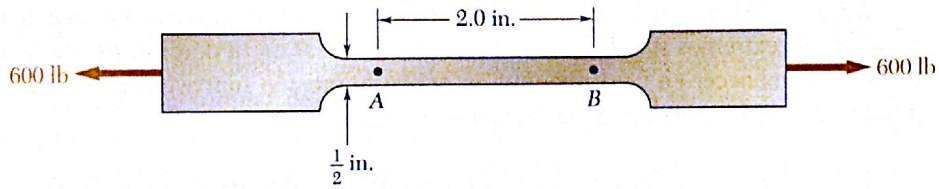


Figura P2.63

2.64 Un tramo de 6 ft de tubería de acero de 12 in. de diámetro exterior y $\frac{1}{2}$ in. de espesor de pared se emplea como columna corta y lleva una carga axial céntrica de 300 kips. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine *a*) el cambio de longitud de la tubería, *b*) el cambio en su diámetro exterior, *c*) el cambio en su espesor de pared.

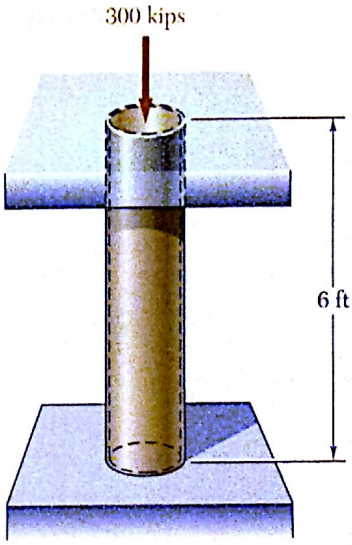


Figura P2.64

2.65 El cambio de diámetro de un perno grande de acero se mide cuidadosamente mientras se aprieta la tuerca. Si se sabe que $E = 200$ GPa y $\nu = 0.29$, determine la fuerza interna en el perno, si se observa que el diámetro disminuye en 13 μm.

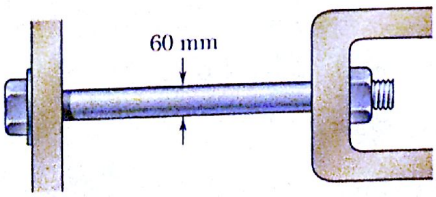


Figura P2.65

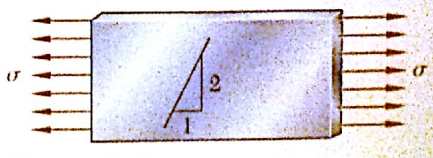


Figura *P2.66*

2.66 Una placa de aluminio ($E = 74$ GPa y $\nu = 0.33$) se somete a una carga axial céntrica que causa un esfuerzo normal σ. Si se sabe que, antes de aplicar la carga, se inscribió sobre la placa una pendiente 2:1, determine la pendiente de la línea cuando $\sigma = 125$ MPa.

2.67 A la varilla de aluminio AD se le ajusta una coraza que se emplea para aplicar una presión hidrostática de 6 000 psi a la porción BC de 12 in. de la varilla. Si se sabe que $E = 10.1 \times 10^6$ psi y que $\nu = 0.36$, determine *a*) el cambio en la longitud total AD, *b*) el cambio en el diámetro del punto medio de la varilla.

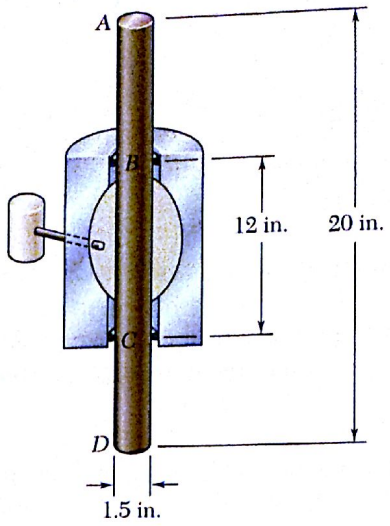


Figura P2.67

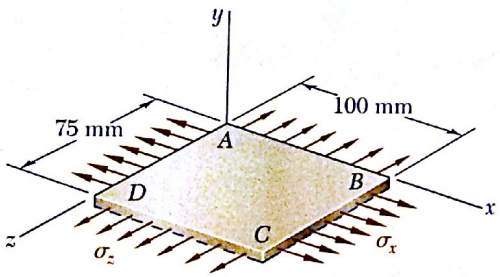


Figura P2.69

2.68 Para la varilla del problema 2.67, determine las fuerzas que deben aplicarse en sus extremos A y D *a*) si la deformación axial en la porción BC de la varilla debe permanecer en cero mientras se aplica la presión hidrostática, *b*) si la longitud total AD de la varilla debe permanecer sin cambios.

2.69 Una tela utilizada en estructuras infladas con aire se sujeta a una carga biaxial que resulta en esfuerzos normales $\sigma_x = 120$ MPa y $\sigma_z = 160$ MPa. Si se sabe que las propiedades de la tela pueden aproximarse a $E = 87$ GPa y $\nu = 0.34$, determine el cambio en longitud de *a*) el lado AB, *b*) el lado BC, *c*) la diagonal AC.

2.70 El bloque mostrado en la figura es de una aleación de magnesio para la que $E = 45$ GPa y $\nu = 0.35$. Si se sabe que $\sigma_x = -180$ MPa, determine *a*) la magnitud de σ_y para la cual el cambio en la altura del bloque será cero, *b*) el cambio correspondiente en el área de la cara $ABCD$, *c*) el cambio correspondiente en el volumen del bloque.

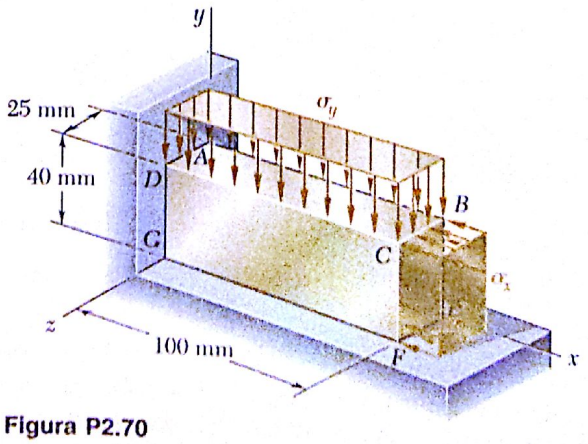


Figura P2.70

2.71 La placa homogénea *ABCD* se encuentra sujeta a carga biaxial como lo muestra la figura. Se sabe que $\sigma_z = \sigma_0$ y que el cambio en la longitud de la placa en la dirección x debe ser cero, es decir, $\epsilon_x = 0$. Si E es el módulo de elasticidad y ν la relación de Poisson, calcule *a*) la magnitud requerida de σ_x, *b*) la razón σ_0/ϵ_z.

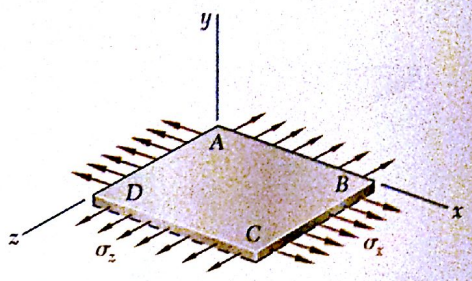


Figura *P2.71*

2.72 Para un elemento sometido a carga axial, exprese la deformación unitaria normal ϵ' en una dirección que forma un ángulo de 45° con el eje de la carga en términos de la deformación axial ϵ_x a partir de *a*) la comparación de las hipotenusas de los triángulos mostrados en la figura 2.54, que representan, respectivamente, a un elemento antes y después de la deformación; *b*) el uso de los valores de los esfuerzos correspondientes σ' y σ_x que se muestran en la figura 1.40, y la ley de Hooke generalizada.

2.73 En muchas situaciones se sabe que el esfuerzo normal en una dirección dada es cero, por ejemplo $\sigma_z = 0$ en el caso de la placa delgada mostrada en la figura. Para este caso, que se conoce como *esfuerzo plano*, demuestre que si las deformaciones ϵ_x y ϵ_y se han determinado experimentalmente, σ_x, σ_y y σ_z se pueden expresar como sigue:

$$\sigma_x = E\frac{\epsilon_x + \nu\epsilon_y}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_y = E\frac{\epsilon_y + \nu\epsilon_x}{1 - \nu^2}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\epsilon_x + \epsilon_y)$$

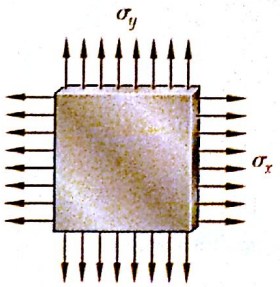


Figura P2.73

2.74 En muchas situaciones las restricciones físicas evitan que ocurra deformación unitaria en una dirección dada, por ejemplo $\epsilon_z = 0$ en el caso mostrado, donde el movimiento longitudinal del prisma se evita en todos los puntos. Las secciones planas perpendiculares al eje longitudinal permanecen planas y a la misma distancia. Demuestre que para esta situación, que se conoce como *deformación plana*, es posible expresar σ_z, ϵ_x y ϵ_y como sigue:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_x - \nu(1 + \nu)\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[(1 - \nu^2)\sigma_y - \nu(1 + \nu)\sigma_x]$$

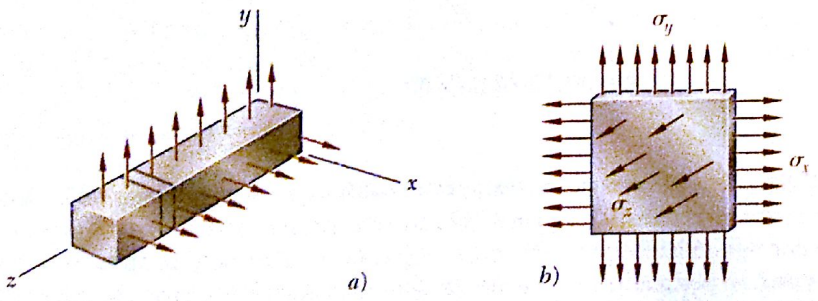


Figura P2.74

2.75 El bloque de plástico mostrado en la figura está adherido a una placa fija y a una placa rígida horizontal a la que se aplica una fuerza **P**. Si se sabe que para el plástico usado $G = 55$ ksi, determine la deflexión de la placa cuando $P = 9$ kips.

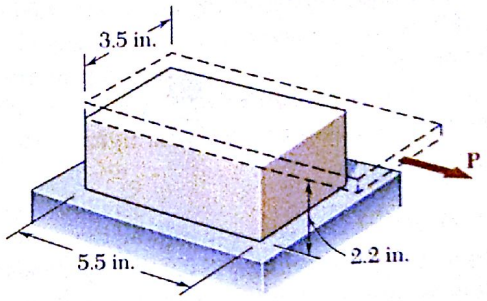


Figura P2.75

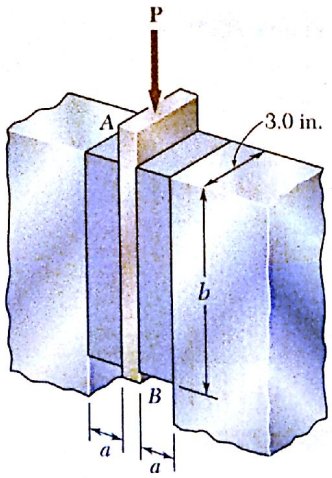
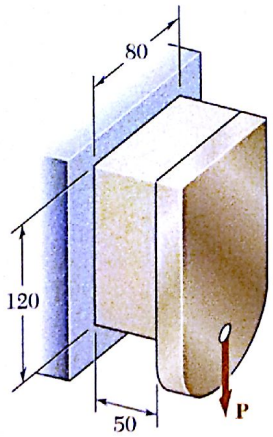


Figura P2.76

2.76 Una unidad para aislamiento de vibraciones se compone de dos bloques de caucho duro adheridos a la placa AB y a soportes rígidos como se muestra en la figura. Para el tipo y grado de caucho usado $\tau_{perm} = 220$ psi y $G = 1\,800$ psi. Si se sabe que una fuerza vertical céntrica con magnitud $P = 3.2$ kips debe causar una deflexión vertical de 0.1 in. en la placa AB, determine las dimensiones mínimas permisibles a y b del bloque.

2.77 El bloque de plástico mostrado en la figura está adherido a un soporte rígido y a una placa vertical a la que se aplica una fuerza **P** de 240 kN. Si se sabe que para el plástico usado $G = 1\,050$ MPa, determine la deflexión de la placa.



Dimensiones en mm

Figura P2.77

2.78 ¿Cuál es la carga **P** que debe aplicarse a la placa del problema 2.77 para producir una deflexión de 1.5 mm?

2.79 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 1.75$ ksi están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $c = 4$ in. y $P = 10$ kips, determine las dimensiones mínimas permisibles a y b de los bloques si el esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 200 psi y la deflexión de la placa debe ser al menos de $\frac{3}{16}$ in.

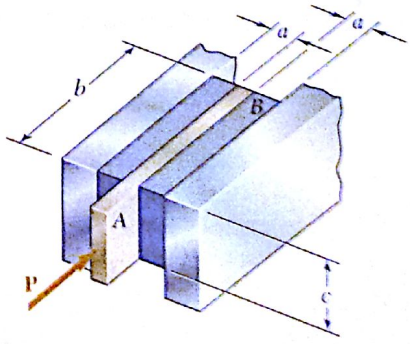


Figura *P2.79* y *P2.80*

2.80 Dos bloques de caucho con un módulo de rigidez $G = 1.50$ ksi están unidos a soportes rígidos y a la placa AB. Si se sabe que $b = 8$ in. y $c = 5$ in., determine la carga máxima permisible P y el grosor mínimo permisible a de los bloques si el esfuerzo cortante en el caucho no debe exceder de 210 psi y la deflexión de la placa debe ser al menos de $\frac{1}{4}$ in.

2.81 Un soporte elastomérico ($G = 0.9$ MPa) se emplea para apoyar una viga de un puente, como se muestra en la figura, para suministrar flexibilidad durante temotos. La viga no debe desplazarse más de 10 mm cuando una carga lateral de 22 kN sea aplicada como se muestra en la figura. Si se sabe que el máximo esfuerzo cortante permisible es de 420 kPa, determine *a*) la dimensión b mínima permisible, *b*) el mínimo grosor a requerido.

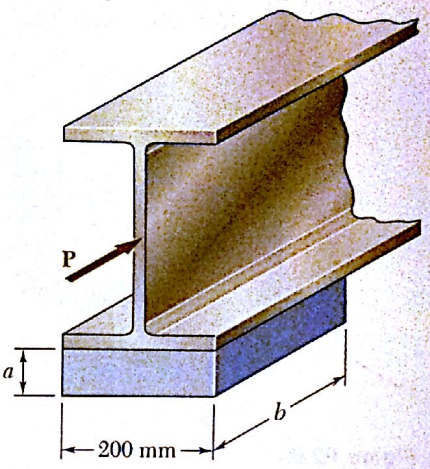


Figura P2.81

2.82 Para el apoyo elastomérico del problema 2.81 con $b = 220$ mm y $a = 30$ mm, determine el módulo de cortante G y el esfuerzo cortante τ para una carga lateral máxima $P = 19$ kN y un desplazamiento máximo $\delta = 12$ mm.

***2.83** Una esfera sólida de acero de 6 in. de diámetro se introduce en el océano hasta un punto en el que la presión es de 7.1 ksi (alrededor de 3 millas bajo la superficie). Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.30$, determine *a*) la disminución en el diámetro de la esfera, *b*) la disminución en el volumen de la esfera, *c*) el porcentaje de incremento en la densidad de la esfera.

***2.84** *a*) Para la carga axial mostrada en la figura, determine el cambio en altura y el cambio en volumen del cilindro de latón mostrado. *b*) Resuelva el inciso *a*), con el supuesto de que la carga es hidrostática con $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -70$ MPa.

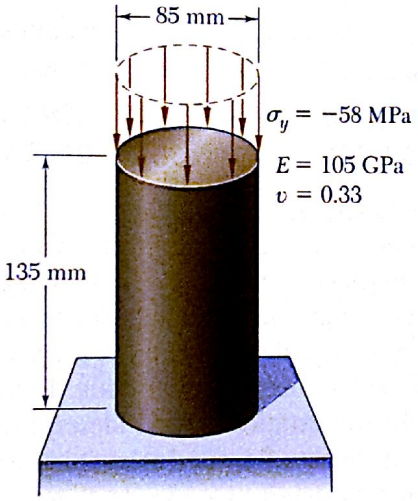


Figura P2.84

***2.85** Determine la dilatación e y el cambio de volumen del tramo de 200 mm de la varilla mostrada en la figura, si *a*) la varilla es de acero con $E = 200$ GPa y $\nu = 0.30$, *b*) la varilla es de aluminio con $E = 70$ GPa y $\nu = 0.35$.

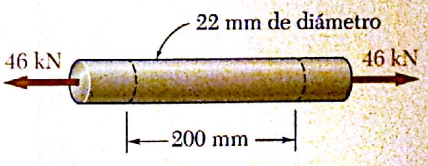


Figura *P2.85*

***2.86** Determine el cambio de volumen de la sección calibrada de 2 in. AB del problema 2.63, *a*) calculando la dilatación del material, *b*) restando el volumen original de la porción AB de su volumen final.

***2.87** Un soporte para aislamiento de vibraciones se compone de una varilla A con radio $R_1 = 10$ mm y un tubo B con radio interior $R_2 = 25$ mm adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 12$ MPa. Determine la fuerza máxima permisible **P** que puede aplicarse a la varilla A si su deflexión no debe exceder 2.50 mm.

***2.88** Un soporte para aislamiento de vibraciones consiste de una varilla A con radio R_1 y un tubo B con radio interior R_2 adheridos a un cilindro hueco de caucho con 80 mm de longitud y con un módulo de rigidez $G = 10.93$ MPa. Determine el valor requerido de la razón R_2/R_1 si una fuerza **P** de 10 kN debe causar una deflexión de 2 mm en la varilla A.

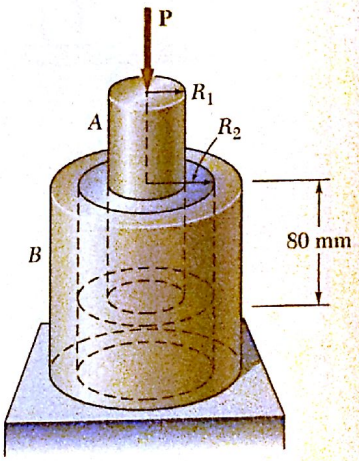


Figura *P2.87* y P2.88

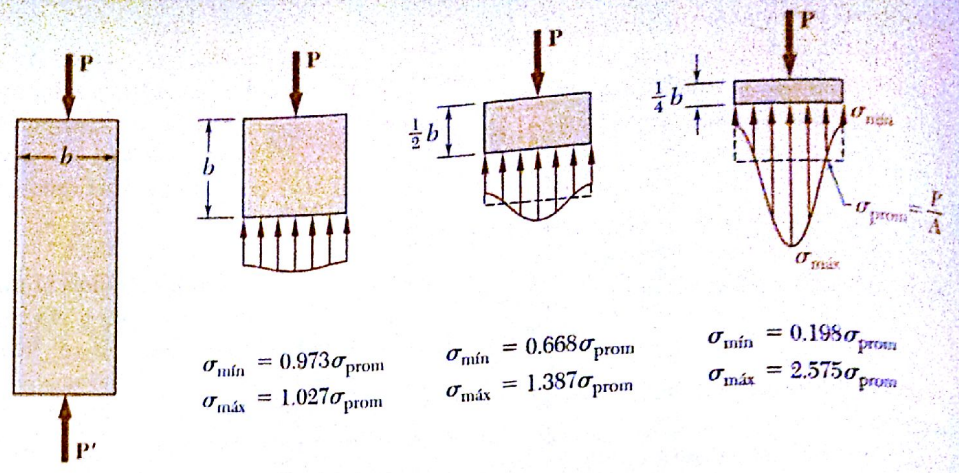


Figura 2.61

varias secciones de una placa rectangular delgada sometida a cargas concentradas. Se advierte que a una distancia b de cada extremo, donde b es el ancho de la placa, la distribución de esfuerzos es casi uniforme a través de la sección, y el valor del esfuerzo σ_y en cualquier punto de esa sección puede suponerse igual al valor promedio P/A. Por consiguiente, a una distancia igual o mayor que el ancho del elemento, la distribución de los esfuerzos a través de una sección dada es la misma, sea que el elemento esté cargado como en la figura 2.58 o en la figura 2.60. En otras palabras, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos puede suponerse independiente del modo de aplicación de la carga. Este enunciado, que se aplica no sólo a cargas axiales sino prácticamente a cualquier tipo de carga, se conoce como el *principio de Saint-Venant*, en honor del matemático e ingeniero francés Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886).

En tanto que el principio de Saint-Venant permite reemplazar una carga dada por una más sencilla con el propósito de calcular los esfuerzos en un elemento estructural, deberán recordarse dos puntos importantes al aplicar este principio:

1. La carga real y la utilizada para calcular los esfuerzos deben ser *estáticamente equivalentes*.
2. Los esfuerzos no pueden calcularse, de esta manera, en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas. Deben utilizarse métodos teóricos o experimentales avanzados para determinar la distribución de esfuerzos en estas áreas.

Deberá observarse también que las placas empleadas para obtener una distribución uniforme de esfuerzos en el elemento de la figura 2.59 deben permitir la libre expansión del elemento hacia los lados. Así, las placas no pueden estar unidas rígidamente al elemento; debe suponerse que sólo están en contacto con él, y lo suficientemente lisas para no impedir la expansión lateral del elemento. Aun cuando tales condiciones de extremos pueden lograrse con un elemento a compresión, no pueden realizarse físicamente con uno en tensión. No importa, sin embargo, si puede fabricarse un aditamento que permita cargar un elemento de tal manera que la distribución de esfuerzos en el elemento sea uniforme. Lo importante es ser capaz de *imaginar un modelo* que permita tal distribución de esfuerzos, y tener este modelo en mente para que más tarde pueda comparársele con las condiciones reales de carga.

2.18 CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Como se vio en la sección precedente, los esfuerzos cerca de los puntos de aplicación de cargas concentradas pueden alcanzar valores mucho más grandes que el valor promedio del esfuerzo en el elemento. Cuando un elemento estructural contiene una discontinuidad, como un agujero o un cambio repentino en su sección transversal, también pueden ocurrir grandes esfuerzos localizados cerca de la discontinuidad. Las figuras 2.62 y 2.63 muestran la distribución de esfuerzos en las secciones críticas correspondientes a dos situaciones como las mencionadas. La figura 2.62 ilustra una barra plana con un *agujero circular* y muestra la distribución de esfuerzos en un corte que pasa a través del centro del agujero. La figura 2.63 ilustra una barra plana con dos porciones de diferentes anchos conectadas por *filetes*; muestra la distribución de esfuerzos en la parte más angosta de la conexión, donde ocurren los esfuerzos más altos.

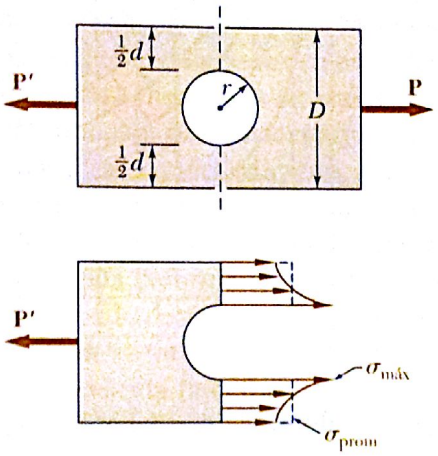


Figura 2.62 Distribución de esfuerzos cerca de un agujero circular en una barra plana bajo carga axial.

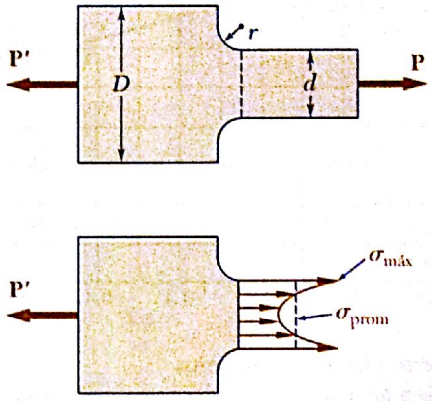


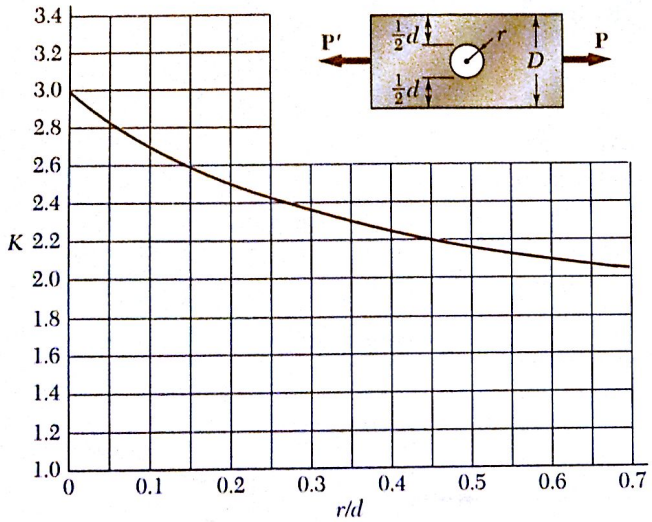
Figura 2.63 Distribución de esfuerzos cerca de los filetes en una barra plana bajo carga axial.

Estos resultados se obtuvieron en forma experimental por el método fotoelástico. Afortunadamente para el ingeniero que tiene que diseñar un elemento dado y no puede permitirse llevar a cabo dicho análisis, los resultados obtenidos son independientes del tamaño del elemento y del material utilizado; sólo dependen de las razones de los parámetros geométricos involucrados, es decir, de la razón r/d en el caso de un agujero circular, y de las razones r/d y D/d en el caso de los filetes. Además, el diseñador está más interesado en el *valor máximo* del esfuerzo en una sección dada, que en la distribución real de los esfuerzos en dicha sección, ya que su preocupación principal es determinar *si* el esfuerzo permisible será excedido bajo una carga dada, y no *dónde* se excederá este valor. Por este motivo, se define la razón

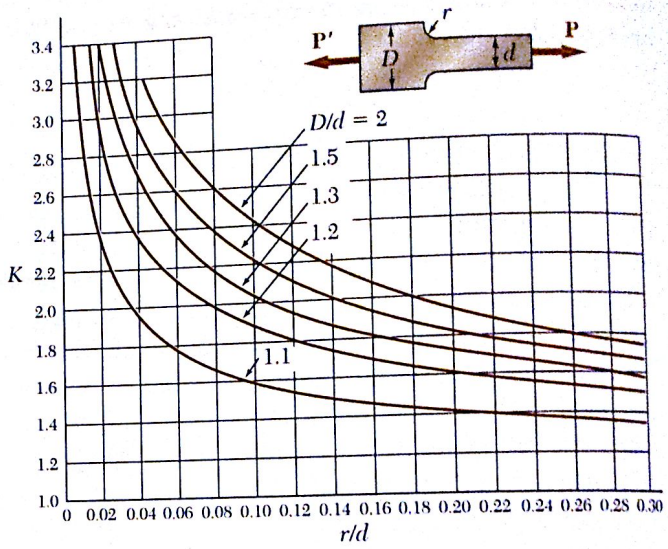
$$K = \frac{\sigma_{máx}}{\sigma_{prom}} \tag{2.48}$$

del esfuerzo máximo sobre el esfuerzo promedio calculado en la sección crítica (la más angosta) de la discontinuidad. Esta razón se conoce como el *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad dada. Los factores de concentración de esfuerzo pueden calcularse de una vez por todas en términos de las razones de los parámetros geométricos involucrados, y los resul-

tados obtenidos pueden ser expresados en la forma de tablas o gráficas, como se muestra en la figura 2.64. Para determinar el máximo esfuerzo que ocurre cerca de una discontinuidad en un elemento dado sometido a una carga axial P dada, el diseñador sólo necesita calcular el esfuerzo promedio $\sigma_{prom} = P/A$ en la sección crítica, y multiplicar el resultado obtenido por el valor apropiado del factor de concentración de esfuerzos K. Deberá observarse, sin embargo, que este procedimiento es válido sólo mientras $\sigma_{máx}$ no exceda el límite de proporcionalidad del material, ya que los valores de K graficados en la figura 2.64 se obtuvieron suponiendo una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación unitaria.



a) Barras planas con agujeros



b) Barras planas con filetes

Figura 2.64 Factores de concentración de esfuerzos para barras planas bajo carga axial†

Observe que el esfuerzo promedio debe calcularse en la sección más angosta, $\sigma_{prom} = P/td$ donde t es el espesor de la barra.

EJEMPLO 2.12

Determine la máxima carga axial **P** que puede soportar con seguridad una barra plana de acero que consta de dos porciones, ambas de 10 mm de espesor, y anchos de 40 y 60 cm, conectadas con filetes de radio $r = 8$ mm. Suponga un esfuerzo normal permisible de 165 MPa.

Primero se calculan las razones

$$\frac{D}{d} = \frac{60 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 1.50 \qquad \frac{r}{d} = \frac{8 \text{ mm}}{40 \text{ mm}} = 0.20$$

Utilizando la curva en la figura 2.64*b* que corresponde a $D/d = 1.50$, se encuentra que el valor del factor de concentración de esfuerzo que corresponde a $r/d = 0.20$ es

$$K = 1.82$$

Llevando este valor a la ecuación (2.48) y despejando σ_{prom}, se tiene

$$\sigma_{prom} = \frac{\sigma_{máx}}{1.82}$$

Pero $\sigma_{máx}$ no puede exceder el esfuerzo permisible $\sigma_{perm} = 165$ MPa. Sustituyendo este valor de $\sigma_{máx}$, se obtiene que el esfuerzo promedio de la porción más angosta ($d = 40$ mm) de la barra no deberá sobrepasar el valor

$$\sigma_{prom} = \frac{165 \text{ MPa}}{1.82} = 90.7 \text{ MPa}$$

Recordando que $\sigma_{prom} = P/A$, se tiene que

$$P = A\sigma_{prom} = (40 \text{ mm})(10 \text{ mm})(90.7 \text{ MPa}) = 36.3 \times 10^3 \text{ N}$$

$$P = 36.3 \text{ kN}$$

† W. D. Pilkey, *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2a. ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1997.

2.19 DEFORMACIONES PLÁSTICAS

Los resultados obtenidos en las secciones precedentes se basaron en la suposición de una relación lineal del esfuerzo y la deformación. En otras palabras, se supuso que el límite de proporcionalidad del material nunca fue excedido. Ésta es una suposición razonable en el caso de los materiales frágiles, que se fracturan sin ceder. En el caso de los materiales dúctiles, sin embargo, esta suposición implica que la resistencia a la cedencia del material no se excede. Las deformaciones permanecerán, entonces, dentro del rango elástico y el elemento estructural bajo consideración recuperará su forma original después de que todas las cargas hayan sido retiradas. Si, por otra parte, los esfuerzos en cualquier parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material, ocurren deformaciones plásticas y la mayoría de los resultados en las anteriores secciones dejan de ser válidos. Por ello debe realizarse un análisis más profundo, basado en relaciones no lineales de esfuerzo y deformación.

Aunque un análisis que tenga en cuenta la relación real entre el esfuerzo y la deformación está más allá del alcance de este libro, se ganará una visión considerable del comportamiento plástico considerando un *material elastoplástico* idealizado para el que el diagrama esfuerzo-deformación consta de los dos segmentos en línea recta mostrados en la figura 2.65. Se nota que el diagrama de esfuerzo-deformación para el acero dulce en los rangos elástico y plástico es similar a esta idealización. Mientras que el esfuerzo σ sea menor que la resistencia a la cedencia σ_Y, el material se comporta elásticamente y obedece la ley de Hooke, $\sigma = E\epsilon$. Cuando σ alcanza el valor σ_Y, el material empieza a fluir y continúa deformándose plásticamente bajo una carga constante. Si la carga se retira, la descarga ocurre a lo largo del segmento de recta CD paralelo a la porción inicial AY sobre la curva de carga. El segmento AD del eje horizontal representa la deformación unitaria correspondiente a la deformación permanente o deformación plástica resultante de la carga y descarga de la probeta. A pesar de que ningún material real se comporta exactamente como se muestra en la figura 2.65, este diagrama de esfuerzo-deformación será útil para analizar las deformaciones plásticas de materiales dúctiles como el acero dulce.

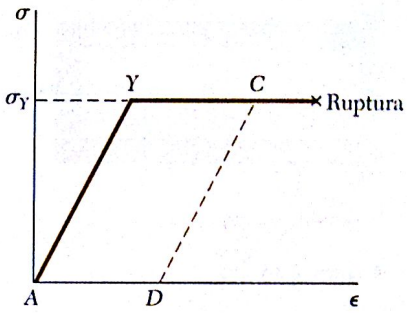


Figura 2.65

EJEMPLO 2.13

Una varilla de longitud $L = 500$ mm y área de sección transversal $A = 60$ mm^2 es de un material elastoplástico que tiene un módulo de elasticidad $E = 200$ GPa en el rango elástico y un punto de cedencia $\sigma_Y = 300$ MPa. A la varilla se le somete a una carga axial hasta que se estira 7 mm; al llegar a ese punto la carga se retira. ¿Cuál es la deformación permanente resultante?

Con referencia al diagrama de la figura 2.65, se encuentra que la deformación máxima, representada por la abscisa del punto C, es

$$\epsilon_C = \frac{\delta_C}{L} = \frac{7 \text{ mm}}{500 \text{ mm}} = 14 \times 10^{-3}$$

Por otra parte, el esfuerzo de cedencia, representado por la abscisa del punto Y, es

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{300 \times 10^6 \text{ Pa}}{200 \times 10^9 \text{ Pa}} = 1.5 \times 10^{-3}$$

La deformación después de descargar está representada por la abscisa ϵ_D del punto D. Se observa de la figura 2.65 que

$$\epsilon_D = AD = YC = \epsilon_C - \epsilon_Y$$
$$= 14 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3} = 12.5 \times 10^{-3}$$

La deformación permanente es la deformación δ_D correspondiente a la deformación ϵ_D. Se tiene que

$$\delta_D = \epsilon_D L = (12.5 \times 10^{-3})(500 \text{ mm}) = 6.25 \text{ mm}$$

EJEMPLO 2.14

Una varilla cilíndrica de 30 in. de largo con un área de sección transversal de $A_v = 0.075$ in.^{2} se coloca dentro de un tubo de la misma longitud y con área de sección transversal $A_t = 0.100$ in^2. Los extremos de la varilla y del tubo están unidos a un soporte rígido por un lado, y a una placa rígida por el otro, como se muestra en el corte longitudinal de la figura 2.66. Se supone que tanto la varilla como el tubo son elastoplásticos, con módulos de elasticidad $E_v = 30 \times 10^6$ psi y $E_t = 15 \times 10^6$ psi, y resistencias a la cedencia $(\sigma_v)_Y = 36$ ksi y $(\sigma_t)_Y = 45$ ksi. Dibújese el diagrama de carga-deflexión para conjunto cuando se aplica una carga **P** a la placa como se muestra.

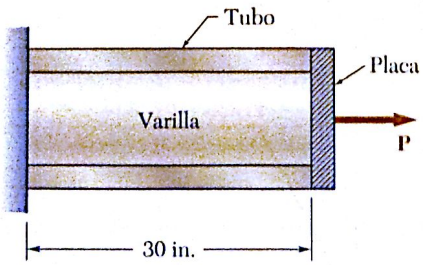


Figura 2.66

Primero se determina la fuerza interna y la elongación de la varilla cuando comienza a ceder:

$$(P_v)_Y = (\sigma_v)_Y A_v = (36 \text{ ksi})(0.075 \text{ in.}^2) = 2.7 \text{ kips}$$

$$(\delta_v)_Y = (\epsilon_v)_Y L = \frac{(\sigma_v)_Y}{E_v} L = \frac{36 \times 10^3 \text{ psi}}{30 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in.})$$

$$= 36 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

Puesto que el material es elastoplástico, el diagrama de fuerza-alargamiento *de la varilla* sólo consiste en una línea recta oblicua y una línea recta horizontal, como se muestra en la figura 2.67*a*. Siguiendo el mismo procedimiento para el tubo, se tiene que

$$(P_t)_Y = (\sigma_t)_Y A_t = (45 \text{ ksi})(0.100 \text{ in.}^2) = 4.5 \text{ kips}$$

$$(\delta_t)_Y = (\epsilon_t)_Y L = \frac{(\sigma_t)_Y}{E_t} L = \frac{45 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in.})$$

$$= 90 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

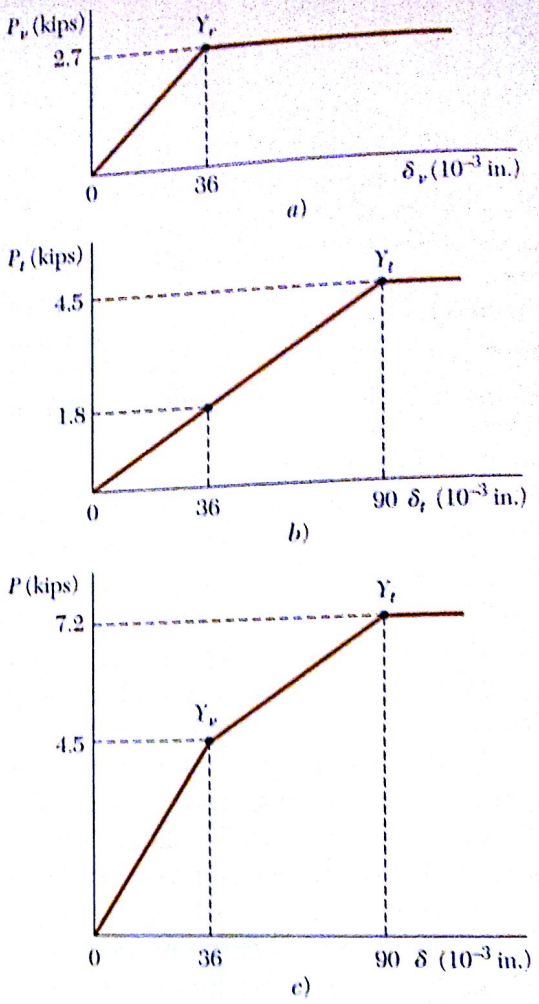


Figura 2.67

El diagrama de carga-deflexión del tubo sólo se muestra en la figura 2.67*b*. Observando que la carga y la deflexión de la combinación varilla-tubo son, respectivamente

$$P = P_v + P_t \qquad \delta = \delta_v = \delta_t$$

se dibuja el diagrama carga-deformación requerido sumando las ordenadas de los diagramas obtenidos para la varilla y para el tubo (figura 2.67*c*). Los puntos Y_v y Y_t corresponden al inicio de la cedencia en la varilla y en el tubo, respectivamente.

EJEMPLO 2.15

Si la carga **P** aplicada al ensamble varilla-tubo del ejemplo 2.14 se incrementa de cero a 5.7 kips y se reduce de nuevo a cero, determine *a*) la máxima elongación del ensamble, *b*) la deformación permanente después de retirar la carga.

a) Alargamiento máximo. Con referencia a la figura 2.67*c*, se observa que la carga $P_{máx} = 5.7$ kips corresponde a un punto localizado en el segmento $Y_v Y_t$ del diagrama de carga-deflexión del ensamble. Así, la varilla ha alcanzado el rango plástico, con $P_v = (P_v)_Y = 2.7$ kips y $\sigma_v = (\sigma_v)_Y = 36$ ksi, en tanto que el tubo todavía está en el rango elástico, con

$$P_t = P - P_v = 5.7 \text{ kips} - 2.7 \text{ kips} = 3.0 \text{ kips}$$

$$\sigma_t = \frac{P_t}{A_t} = \frac{3.0 \text{ kips}}{0.1 \text{ in.}^2} = 30 \text{ ksi}$$

$$\delta_t = \epsilon_t L = \frac{\sigma_t}{E_t} L = \frac{30 \times 10^3 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} (30 \text{ in.}) = 60 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

El alargamiento máximo del ensamble es, pues,

$$\delta_{máx} = \delta_t = 60 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

b) Deformación permanente. Al disminuir la carga **P** desde 5.7 kips hasta cero, las fuerzas internas P_v y P_t decrecen a lo largo de una línea recta, como se muestra en la figura 2.68*a* y *b*, respectivamente. La fuerza P_v disminuye a lo largo de la línea *CD* paralela a la posición unitaria de la curva de carga, mientras que la fuerza P_t disminuye a lo largo de la curva original de carga, ya que el esfuerzo de cedencia no fue excedido en el tubo. Su suma *P*, por lo tanto, se reducirá a lo largo de una línea *CE* paralela a la porción $0Y_v$ de la curva carga-deflexión para el ensamble (figura 2.68*c*). Con referencia a la figura 2.67*c*, se encuentra que la pendiente de $0Y_v$, y por lo tanto *CE*, es

$$m = \frac{4.5 \text{ kips}}{36 \times 10^{-3} \text{ in.}} = 125 \text{ kips/in.}$$

El segmento de línea *FE* en la figura 2.68*c* representa la deformación δ' del ensamble durante la fase de descarga, el segmento $0E$ es la deformación permanente δ_p después de retirar la carga **P**. Del triángulo *CEF* se tiene que

$$\delta' = -\frac{P_{máx}}{m} = -\frac{5.7 \text{ kips}}{125 \text{ kips/in.}} = -45.6 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

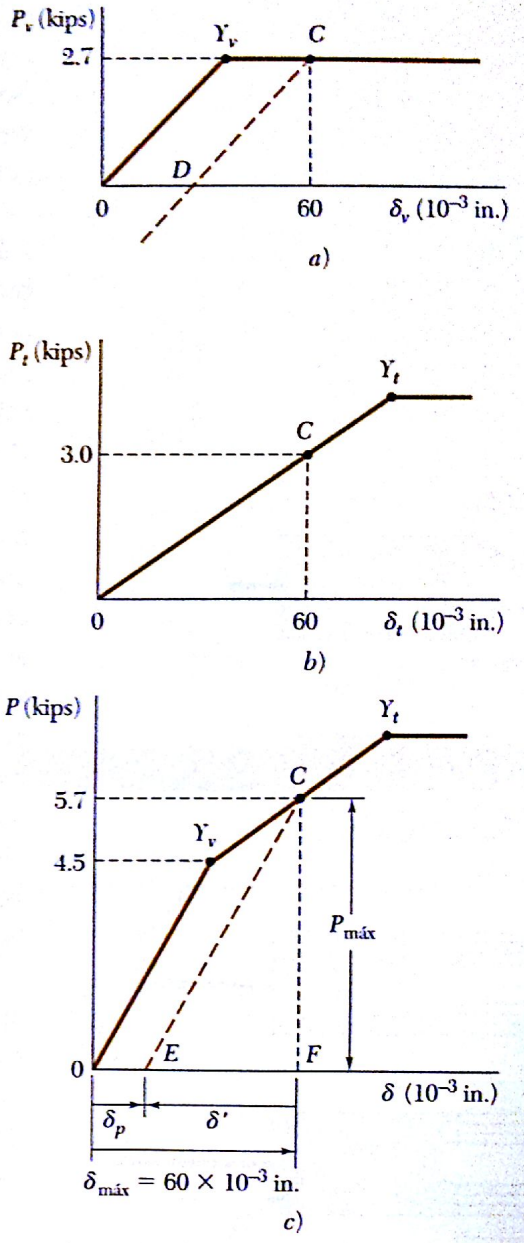


Figura 2.68

La deformación permanente es, pues

$$\delta_P = \delta_{máx} + \delta' = 60 \times 10^{-3} - 45.6 \times 10^{-3}$$

$$= 14.4 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

El análisis de las concentraciones de esfuerzo de la sección 2.18 se efectuó bajo el supuesto de que la relación esfuerzo-deformación unitaria es lineal. Las distribuciones de esfuerzo mostradas en las figuras 2.62 y 2.63 y los valores de los factores de concentración de esfuerzos en la figura 2.64 no pueden, por lo tanto, usarse cuando hay deformaciones plásticas, es decir, cuando el valor de $\sigma_{máx}$ obtenido de estas figuras excede la resistencia a la cedencia σ_Y.

Considere otra vez la barra plana con un agujero circular de la figura 2.62, y suponga que el material es elastoplástico, es decir, que su diagrama de esfuerzo-deformación es como se muestra en la figura 2.65. Mientras no ocurra deformación plástica, la distribución de esfuerzo será como se indica en la sección 2.18 (figura 2.69*a*). Se observa que el área bajo la curva de distribución de esfuerzos representa la integral $\int \sigma\, dA$, que es igual a la carga P. Así, esta área y el valor $\sigma_{máx}$, deben aumentar al incrementarse la carga P. Mientras $\sigma_{máx} \leq \sigma_Y$, todas las distribuciones sucesivas de esfuerzo obtenidas al aumentar P tendrán la forma mostrada en la figura 2.62 y repetida en la figura 2.69*a*. Sin embargo, al aumentar P por encima del valor P_Y que corresponde a $\sigma_{máx} = \sigma_Y$ (figura 2.69*b*), la curva de distribución de esfuerzo se debe aplanar en la cercanía del agujero (figura 2.69*c*), ya que el esfuerzo en el material considerado no puede exceder el valor σ_Y. Esto indica que el material está fluyendo en la cercanía del agujero. Al aumentar más la carga P, la zona plástica donde ocurre la cedencia se sigue expandiendo, hasta que alcanza los bordes de la placa (figura 2.69*d*). En ese punto, la distribución de esfuerzos a través de la placa es uniforme, $\sigma = \sigma_Y$ y el valor correspondiente de la carga $P = P_U$ es el valor máximo que puede aplicarse a la barra sin causar ruptura.

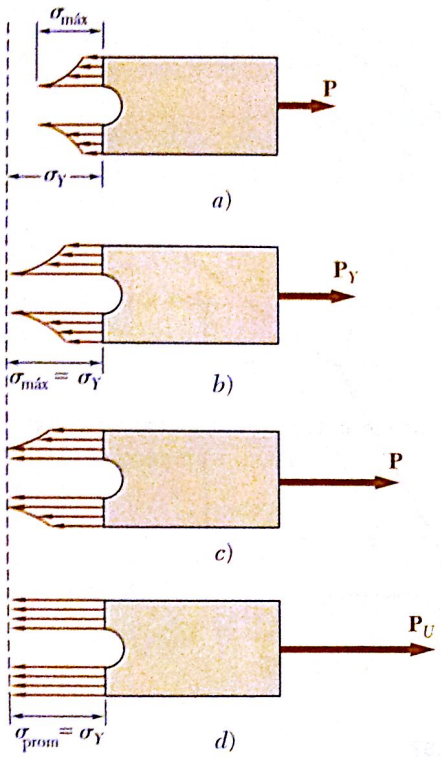


Figura 2.69 Distribución de esfuerzos en un material elastoplástico cuando se incrementa la carga.

Es interesante comparar el valor máximo P_Y de la carga que puede aplicarse sin producir deformación permanente en la barra con el valor P_U que causará la ruptura. Recordando la definición del esfuerzo promedio $\sigma_{prom} = P/A$, donde A es el área neta de la sección transversal, y la definición del factor de concentración de esfuerzos, $K = \sigma_{máx}/\sigma_{prom}$, se escribe

$$P = \sigma_{prom}A = \frac{\sigma_{máx}A}{K} \tag{2.49}$$

para cualquier valor de $\sigma_{máx}$ que no exceda σ_Y. Cuando $\sigma_{máx} = \sigma_Y$ (figura 2.69*b*), se tiene que $P = P_Y$, y la ecuación (2.49) da

$$P_Y = \frac{\sigma_Y A}{K} \tag{2.50}$$

Por otro lado, cuando $P = P_U$ (figura 2.69*d*) se tiene que $\sigma_{prom} = \sigma_Y$ y

$$P_U = \sigma_Y A \tag{2.51}$$

Comparando las ecuaciones (2.50) y (2.51), se concluye que

$$P_Y = \frac{P_U}{K} \tag{2.52}$$

*2.20 ESFUERZOS RESIDUALES

En el ejemplo 2.13 de la sección anterior, se consideró una varilla estirada más allá del punto de cedencia. Al retirarse la carga, la varilla no recuperó su longitud original: había sido deformada permanentemente. Sin embargo, después de que se quitó la carga, todos los esfuerzos desaparecieron. No debe suponerse que éste es siempre el caso. De hecho, cuando sólo algunas de las partes de una estructura indeterminada sufren deformaciones plásticas, como en el ejemplo 2.15, o cuando distintas partes de la estructura sufren diferentes deformaciones plásticas, los esfuerzos en varias partes de la estructura no regresarán a cero, por lo general, después de que la carga haya sido retirada. Los esfuerzos, llamados *esfuerzos residuales*, permanecerán en las distintas partes de la estructura.

A pesar de que el cálculo de los esfuerzos residuales en una estructura real pueden ser muy complicados, el ejemplo siguiente proporcionará una comprensión general del método que debe emplearse para su determinación.

EJEMPLO 2.16

Determine los esfuerzos residuales en la varilla y el tubo de los ejemplos 2.14 y 2.15 después de que la carga **P** aumenta de cero a 5.7 kips y luego se reduce de nuevo a cero.

Se observa en los diagramas de la figura 2.70 que después de que la carga **P** ha regresado a cero, las fuerzas internas P_v y P_t *no* son iguales a cero. Sus valores se indican por el punto E en las partes a y b, respectivamente, de la figura 2.70. Se deduce que los esfuerzos correspondientes tampoco son iguales a cero después de que el ensamble ha sido descargado. Para determinar estos esfuerzos residuales, se determinarán los esfuerzos inversos σ_v' y σ_t' causados por la descarga y se sumarán a los esfuerzos máximos $\sigma_v = 36$ ksi y $\sigma_t = 30$ ksi encontrados en la parte a del ejemplo 2.15.

La deformación que causa la descarga es la misma en el tubo y en la varilla. Es igual a δ'/L, donde δ' es la deformación del ensamble durante la descarga, que fue encontrado en el ejemplo 2.15. Se tiene que

$$\epsilon' = \frac{\delta'}{L} = \frac{-45.6 \times 10^{-3} \text{ in.}}{30 \text{ in.}} = -1.52 \times 10^{-3} \text{in./in.}$$

Los esfuerzos inversos correspondientes en la varilla y en el tubo son

$$\sigma_v' = \epsilon' E_v = (-1.52 \times 10^{-3})(30 \times 10^6 \text{ psi}) = -45.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_t' = \epsilon' E_t = (-1.52 \times 10^{-3})(15 \times 10^6 \text{ psi}) = -22.8 \text{ ksi}$$

Los esfuerzos residuales se encuentran superponiendo los esfuerzos debidos a la carga y los esfuerzos inversos debidos a la descarga. Se tiene que

$$(\sigma_v)_{\text{res}} = \sigma_v + \sigma_v' = 36 \text{ ksi} - 45.6 \text{ ksi} = -9.6 \text{ ksi}$$

$$(\sigma_t)_{\text{res}} = \sigma_t + \sigma_t' = 30 \text{ ksi} - 22.8 \text{ ksi} = +7.2 \text{ ksi}$$

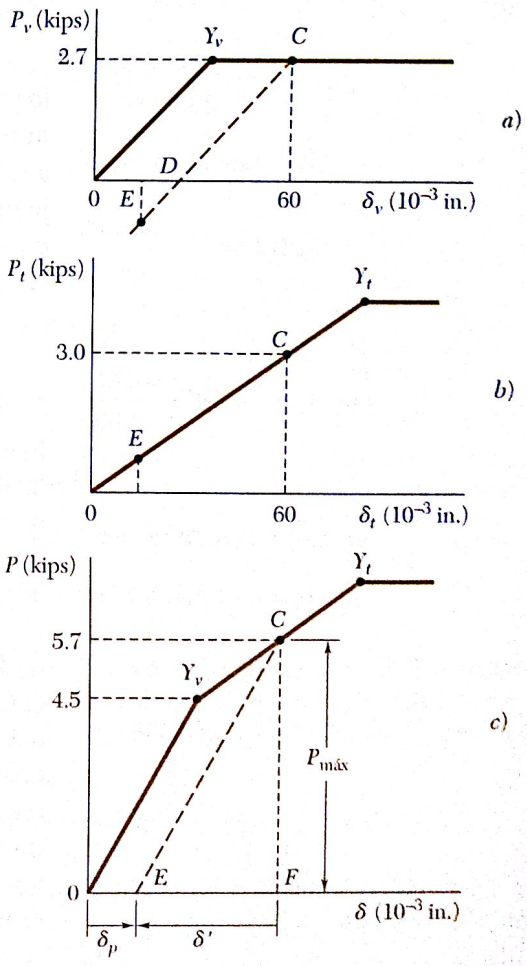


Figura 2.70

Las deformaciones plásticas debidas a cambios de temperatura también pueden producir esfuerzos residuales. Por ejemplo, considere un pequeño tapón que debe soldarse a una placa grande. Para propósitos de análisis al tapón se le considera como una pequeña varilla AB que será soldada a través de un pequeño agujero en la placa (figura 2.71). Durante el proceso de soldadura, la temperatura de la varilla se elevará a más de 1 000°C, temperatura a la que su módulo de elasticidad y, por lo tanto, su rigidez y su esfuerzo, serán casi cero. Como la placa es grande, su temperatura no aumentará significativamente por encima de la temperatura ambiente (20°C). Así, al terminar la soldadura, se tendrá la varilla AB a una $T = 1\,000$°C, sin esfuerzo, unida a una placa que se encuentra a 20°C.

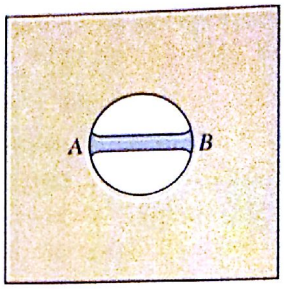


Figura 2.71

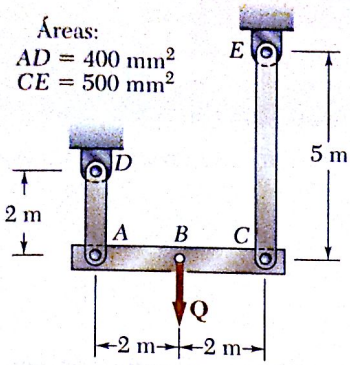
Al enfriarse la varilla, aumenta su módulo de elasticidad y, alrededor de los 500°C, se aproximará a su valor normal de alrededor de 200 GPa. Al disminuir aún más la temperatura de la varilla, se supone una situación similar a la considerada en la sección 2.10 y que se ilustra en la figura 2.35. Despejando ΔT de la ecuación (2.23) e igualando a σ a la resistencia de cedencia, $\sigma_Y = 300$ MPa, de acero promedio y $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C, encontramos el cambio de temperatura que hará que la varilla fluya:

$$\Delta T = -\frac{\sigma}{E\alpha} = -\frac{300 \text{ MPa}}{(200 \text{ GPa})(12 \times 10^{-6}/°\text{C})} = -125°\text{C}$$

Esto significa que la varilla comenzará a fluir alrededor de 375°C y continuará cediendo a un nivel casi constante de esfuerzo mientras se enfría a temperatura ambiente. Como resultado de la operación de soldadura, un esfuerzo residual aproximadamente igual a la resistencia de cedencia del acero utilizado se crea en el tapón y en la soldadura.

Los esfuerzos residuales también ocurren como resultado del enfriamiento de los metales fundidos o laminados en caliente. En estos casos, las capas externas se enfrían con mayor rapidez que el núcleo interior. Esto provoca que las capas externas adquieran de nuevo su rigidez (E regresa a su valor normal) más rápidamente que el núcleo interior. Cuando el elemento completo ha retornado a la temperatura ambiente, el núcleo interior se habrá contraído más que las capas externas. El resultado son esfuerzos residuales longitudinales de tensión en el núcleo interno y esfuerzos residuales longitudinales de compresión en las capas exteriores.

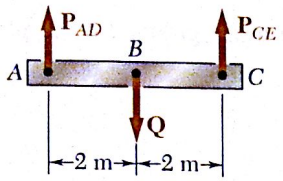
Los esfuerzos residuales debidos a la soldadura, la fundición y el laminado en caliente pueden ser muy grandes (del orden de magnitud de la resistencia a la cedencia). Es posible eliminar estos esfuerzos, cuando es necesario, recalentando el elemento a alrededor de 600°C, y después permitiéndole enfriarse lentamente en un periodo de 12 a 24 horas.



PROBLEMA MODELO 2.6

La viga rígida *ABC* está suspendida de dos varillas de acero, como se muestra en la figura y está inicialmente en posición horizontal. El punto medio *B* de la viga se deflecta 10 mm hacia abajo por la aplicación lenta de la fuerza **Q**, después de lo cual la fuerza se retira lentamente. Sabiendo que el acero empleado para las varillas es elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 300$ MPa, determine *a*) el valor máximo requerido de Q y la posición correspondiente de la viga, *b*) la posición final de la viga.

SOLUCIÓN



Estática. Como **Q** se aplica en el punto medio de la viga, se tiene que

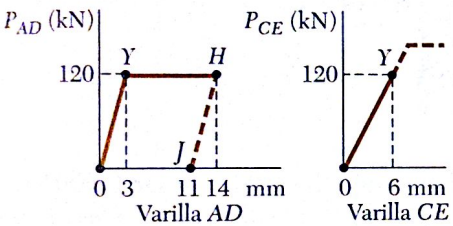
$$P_{AD} = P_{CE} \qquad \text{y} \qquad Q = 2P_{AD}$$

Acción elástica. El valor máximo de Q y la deflexión elástica máxima del punto *A* ocurren cuando $\sigma = \sigma_Y$ en la varilla *AD*.

$$(P_{AD})_{\text{máx}} = \sigma_Y A = (300 \text{ MPa})(400 \text{ mm}^2) = 120 \text{ kN}$$

$$Q_{\text{máx}} = 2(P_{AD})_{\text{máx}} = 2(120 \text{ kN}) \qquad Q_{\text{máx}} = 240 \text{ kN} \blacktriangleleft$$

$$\delta_{A_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_Y}{E} L = \left(\frac{300 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(2 \text{ m}) = 3 \text{ mm}$$



Diagramas carga-deflexión

Puesto que $P_{CE} = P_{AD} = 120$ kN, el esfuerzo en la varilla *CE* es

$$\sigma_{CE} = \frac{P_{CE}}{A} = \frac{120 \text{ kN}}{500 \text{ mm}^2} = 240 \text{ MPa}$$

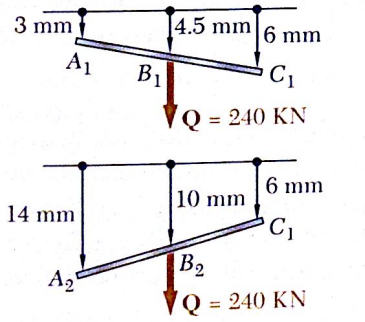
La deflexión correspondiente del punto *C* es

$$\delta_{C_1} = \epsilon L = \frac{\sigma_{CE}}{E} L = \left(\frac{240 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}}\right)(5 \text{ m}) = 6 \text{ mm}$$

La deflexión correspondiente del punto *B* es

$$\delta_{B_1} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_1} + \delta_{C_1}) = \tfrac{1}{2}(3 \text{ mm} + 6 \text{ mm}) = 4.5 \text{ mm}$$

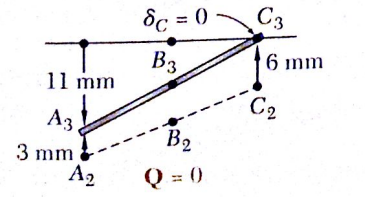
Como $\delta_B = 10$ mm, se concluye que ocurrirá deformación plástica.



a) Deflexiones para $\delta_B = 10$ mm ◀

Deformación plástica. Para $Q = 240$ kN, la deformación plástica ocurre en la varilla *AD*, donde $\sigma_{AD} = \sigma_Y = 300$ MPa. Ya que el esfuerzo en la varilla *CE* está dentro del rango elástico, δ_C permanece igual a 6 mm. La deflexión δ_A para la que $\delta_B = 10$ mm se obtiene escribiendo

$$\delta_{B_2} = 10 \text{ mm} = \tfrac{1}{2}(\delta_{A_2} + 6 \text{ mm}) \qquad \delta_{A_2} = 14 \text{ mm}$$



b) Deflexiones finales ◀

Descarga. Al retirarse lentamente la fuerza **Q**, la fuerza P_{AD} disminuye a lo largo de la línea *HJ* paralela a la porción inicial del diagrama carga-deflexión de la varilla *AD*. La deflexión final del punto *A* es

$$\delta_{A_3} = 14 \text{ mm} - 3 \text{ mm} = 11 \text{ mm}$$

Como el esfuerzo en la varilla *CE* permaneció dentro del rango elástico, se advierte que la deflexión final del punto *C* es cero.

PROBLEMAS

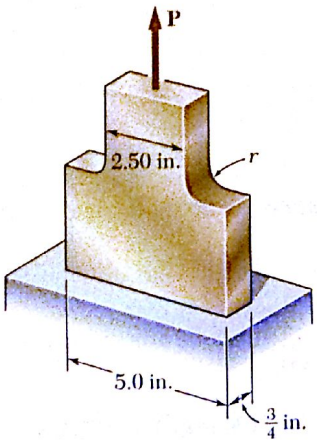


Figura *P2.93* y *P2.94*

2.93 Si se sabe que $P = 10$ kips, determine el esfuerzo máximo cuando *a*) $r = 0.50$ in., *b*) $r = 0.625$ in.

2.94 Si se sabe que, para la placa mostrada, el esfuerzo permisible es de 16 ksi, determine el valor máximo permisible de P cuando *a*) $r = \frac{3}{8}$ in., *b*) $r = \frac{3}{4}$ in.

2.95 Para $P = 8.5$ kips, determine el mínimo grosor t de la placa que se requiere si el esfuerzo permisible es de 18 ksi.

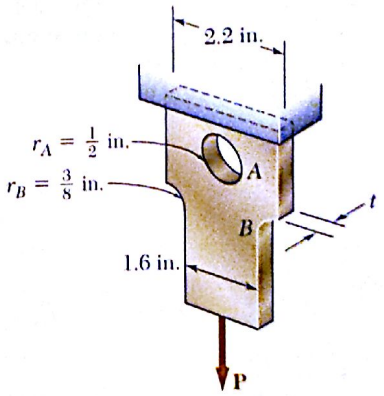


Figura P2.95

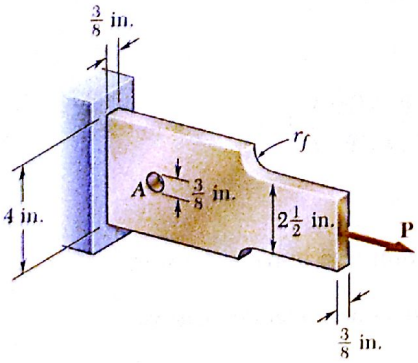


Figura P2.96

2.96 Si se sabe que el agujero tiene un diámetro de $\frac{3}{8}$ in., determine *a*) el radio r_f de los filetes para el cual ocurre el mismo esfuerzo máximo en el agujero A y en los filetes, *b*) la carga máxima permisible **P** correspondiente si el esfuerzo permisible es de 15 ksi.

2.97 En la placa debe perforarse un agujero en A. Los diámetros de las brocas disponibles para perforar el agujero van de 12 a 24 mm en incrementos de 3 mm. *a*) Determine el diámetro d de la broca más grande que puede utilizarse si la carga permisible en el agujero debe exceder la de los filetes. *b*) Si el esfuerzo permisible en la placa es de 145 MPa, ¿cuál es la carga permisible **P** correspondiente?

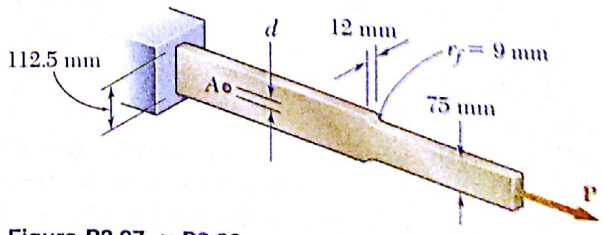
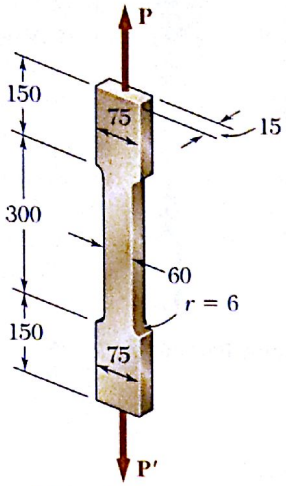


Figura P2.97 y P2.98

2.98 *a*) Para $P = 58$ kN y $d = 12$ mm, determine el esfuerzo máximo en la placa mostrada. *b*) Resuelva el inciso *a*), si no se perfora el agujero en A.

2.99 La probeta de aluminio que se muestra en la figura está sujeta a dos fuerzas axiales céntricas iguales y opuestas de magnitud P. *a*) Si se sabe que $E = 70$ GPa y $\sigma_{perm} = 200$ MPa, determine el valor permisible máximo de P y la elongación total correspondiente de la probeta. *b*) Resuelva el inciso *a*) en el supuesto de que la probeta ha sido reemplazada por una barra de aluminio de la misma longitud y una sección transversal rectangular uniforme de 60 × 15 mm.



Dimensiones en mm

Figura P2.99

2.100 Para la probeta del problema 2.99, determine el valor máximo del esfuerzo normal correspondiente a la elongación total de 0.75 mm.

2.101 La varilla AB es de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi. Después de que la varilla se ha conectado a una palanca rígida CD, se encuentra que el extremo C está $\frac{3}{8}$ in. más alto de lo debido.

Una fuerza vertical **Q** se aplica a C hasta que este punto se mueve a la posición C'. Determine la magnitud requerida de **Q** y la deflexión δ_1 si la palanca debe regresar *elásticamente* a la posición horizontal cuando **Q** se retira.

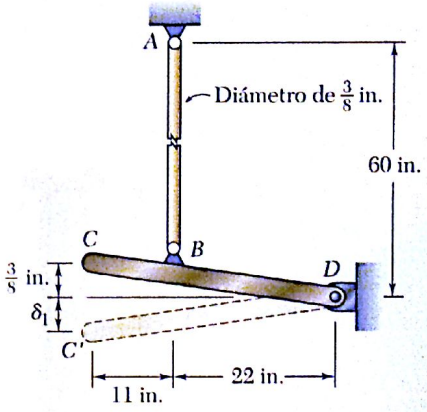


Figura P2.101

2.102 Retome el problema 2.101, ahora suponga que el punto de fluencia del acero dulce es de 50 ksi.

2.103 La barra cuadrada de 30 mm AB tiene una longitud $L = 2.2$ m, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la barra hasta que el extremo A se ha movido hacia abajo en una cantidad δ_m. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la barra después de que se elimina la fuerza, sabiendo que *a*) $\delta_m = 4.5$ mm, *b*) $\delta_m = 8$ mm.

2.104 La barra cuadrada de 30 mm AB tiene una longitud $L = 2.5$ m, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la barra y después se retira para darle una deformación permanente de δ_p. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la barra si el valor deseado de δ_p es *a*) 3.5 mm, *b*) 6.5 mm.

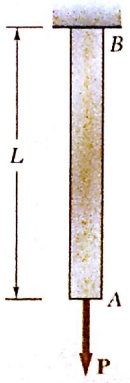


Figura *P2.103* y *P2.104*

2.105 La varilla *ABC* consta de dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la varilla y después se retira para darle una deformación permanente de $\delta_p = 2$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la máxima cantidad δ_m a la que debe estirarse la varilla para obtener la deformación permanente deseada.

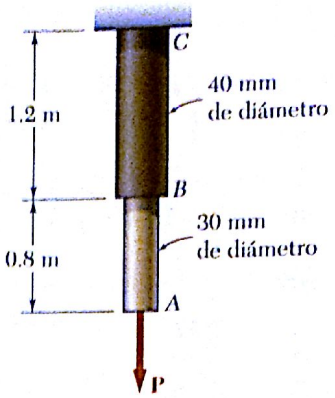


Figura P2.105 y P2.106

2.106 La varilla *ABC* consta de dos porciones cilíndricas *AB* y *BC*, está hecha de un acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Una fuerza **P** se aplica a la varilla hasta que el extremo *A* se ha movido hacia abajo en una cantidad $\delta_m = 5$ mm. Determine el valor máximo de la fuerza **P** y la deformación permanente de la varilla después de que se elimina la fuerza.

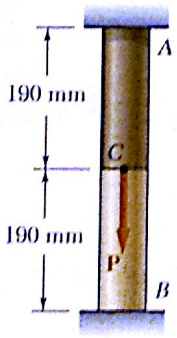


Figura P2.107

2.107 La varilla *AB* consta de dos secciones cilíndricas *AC* y *BC*, cada una con un área de sección transversal de 1 750 mm^2. La porción *AC* está hecha de un acero dulce con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, y la porción *CB* es de acero de alta resistencia con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 345$ MPa. Una carga **P** se aplica en *C* como se muestra en la figura. Si ambos aceros se suponen elastoplásticos, determine *a*) la máxima deflexión de *C* si *P* se incrementa gradualmente desde cero hasta 975 kN y al llegar ahí se reduce de nuevo a cero, *b*) el máximo esfuerzo en cada porción de la varilla, *c*) la deflexión permanente de *C*.

2.108 Para la barra compuesta del problema 2.107, si *P* se incrementa de manera gradual desde cero hasta que la deflexión en el punto *C* alcanza un valor máximo de $\delta_m = 0.03$ mm y, al llegar a este punto, se reduce de nuevo a cero, determine *a*) el valor máximo de *P*, *b*) el máximo esfuerzo de cada porción de la barra, *c*) la deflexión permanente de *C* después de retirar la carga.

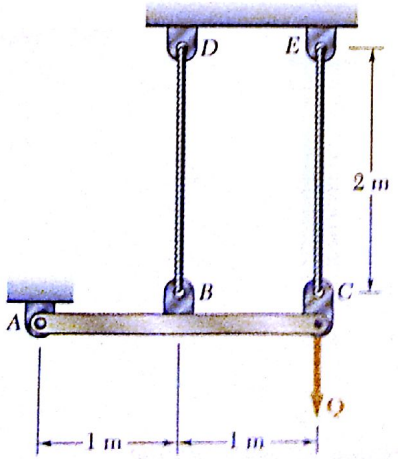


Figura *P2.109*

2.109 Cada uno de los cables tiene un área de sección cruzada de 100 mm^2 y está hecho de un material elastoplástico para el que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa. Una fuerza **Q** se aplica en el punto *C* de la barra rígida *ABC* y se incrementa de manera gradual desde 0 hasta 50 kN y después se reduce de nuevo hasta cero. Si se sabe que los cables estaban inicialmente tensos, determine *a*) el esfuerzo máximo que ocurre en el cable *BD*, *b*) la deflexión máxima del punto *C*, *c*) el desplazamiento final del punto *C*. (*Sugerencia*: En el inciso *c*), considere que el cable *CE* no está tenso.)

2.110 Retome el problema 2.109, y ahora suponga que los cables son reemplazados por varillas con la misma área de sección transversal y del mismo material. Además, que las varillas se apuntalan de tal manera que puedan llevar cargas de compresión.

2.111 Dos barras de acero templado, cada una de $\frac{3}{16}$ in. de grosor, se unen a una barra de acero dulce de $\frac{1}{2}$ in. Esta barra compuesta se sujeta a una carga axial centrada de magnitud P. Ambos aceros son elastoplásticos con $E = 29 \times 10^6$ psi y resistencias a la fluencia iguales a 100 ksi y 50 ksi, respectivamente, para el acero templado y el dulce. La carga P se incrementa en forma gradual desde cero hasta que la deformación de la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$, y entonces se reduce de nuevo a cero. Calcule *a*) el máximo valor de P, *b*) el máximo esfuerzo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente una vez que la carga se retira.

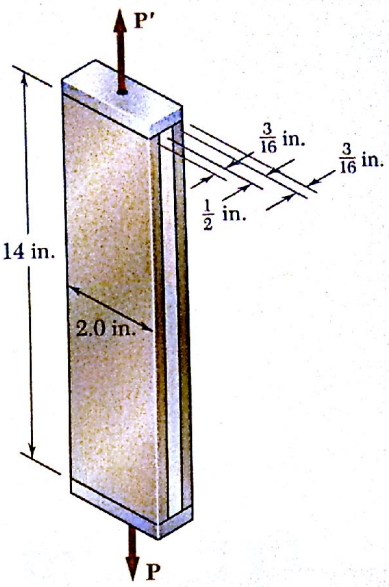


Figura P2.111

2.112 Para la barra compuesta del problema 2.111, si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después disminuye hasta cero, determine *a*) la deformación máxima de la barra, *b*) el esfuerzo máximo en las barras de acero templado, *c*) la deformación permanente después de que la carga se retira.

2.113 La barra rígida ABC se soporta en dos eslabones, AD y BE, de sección transversal rectangular uniforme de 37.5 × 6 mm, los cuales están hechos de acero dulce que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. La magnitud de la fuerza **Q** aplicada en B se incrementa gradualmente desde cero a 260 kN. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el valor del esfuerzo normal en cada eslabón, *b*) la máxima deflexión del punto B.

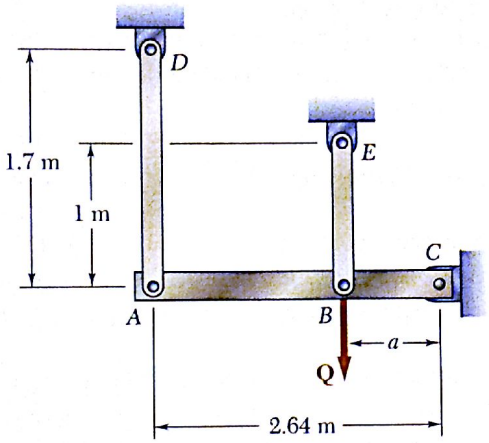


Figura P2.113

2.114 Retome el problema 2.113, y ahora suponga que $a = 1.76$ m y que la magnitud de la fuerza **Q** que se aplica en B se incrementa gradualmente desde cero hasta 135 kN.

***2.115** Retome el problema 2.113, y ahora suponga que la magnitud de la fuerza **Q** aplicada en B se incrementa gradualmente desde cero hasta 260 kN y después se disminuye hasta cero. Si se sabe que $a = 0.640$ m, determine *a*) el esfuerzo residual en cada eslabón, *b*) la deflexión final en el punto B. Suponga que los eslabones se apuntalan de tal manera que puedan soportar cargas compresivas sin pandearse.

2.116 Una varilla uniforme de acero con área de sección transversal A se une a unos soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 45°F. Se supone que el acero es elastoplástico con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se sabe que $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F, determine el esfuerzo en la barra *a*) cuando la temperatura se eleva a 320°F, *b*) después de que la temperatura ha regresado a 45°F.

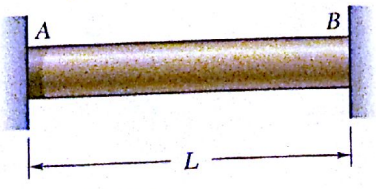


Figura P2.116

2.117 La varilla de acero ABC está unida a soportes rígidos y se encuentra sin esforzar a una temperatura de 25°C. El acero se supone elastoplástico, con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. La temperatura de ambas porciones de la varilla se eleva entonces a 150°C. Si se sabe que $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$/°C, determine *a*) el esfuerzo en ambas partes de la varilla, *b*) la deflexión del punto C.

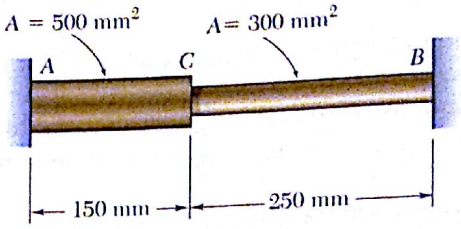


Figura P2.117

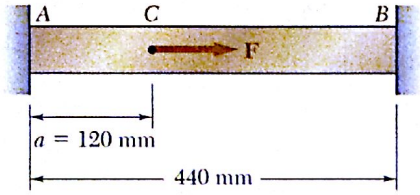


Figura P2.119

***2.118** Retome el problema 2.117, y ahora suponga que la temperatura de la varilla se eleva a 150°C y después regresa a 25°C.

***2.119** La barra AB tiene un área de sección transversal de 1 200 mm² y es de un acero que se supone elastoplástico con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Si se sabe que la fuerza **F** aumenta desde 0 hasta 520 kN y después disminuye de nuevo a cero, determine *a*) la deflexión permanente del punto C, *b*) el esfuerzo residual en la barra.

***2.120** Retome el problema 2.119, y ahora suponga que $a = 180$ mm.

***2.121** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si P se incrementa gradualmente desde cero hasta 98 kips y después se disminuye nuevamente a cero.

***2.122** Para la barra compuesta del problema 2.111, determine los esfuerzos residuales en las barras de acero templado si P se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación en la barra alcanza un valor máximo $\delta_m = 0.04$ in. y después disminuye de nuevo hasta cero.

***2.123** Dos barras angostas de aluminio están unidas a los costados de una placa gruesa de acero como se muestra en la figura. Inicialmente, a una $T_1 = 70$°F, todos los esfuerzos son cero. Si se sabe que la temperatura se elevará lentamente hasta T_2 y después se reducirá a T_1, determine *a*) la máxima temperatura T_2 que no resulta en esfuerzos residuales, *b*) la temperatura T_2 que resultará en un esfuerzo residual en el aluminio igual a 58 ksi. Suponga $\alpha_{al} = 12.8 \times 10^{-6}$/°F para el aluminio y $\alpha_{ac} = 6.5 \times 10^{-6}$/°F para el acero. Suponga, además, que el aluminio es elastoplástico con $E = 10.9 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 58$ ksi. (*Sugerencia*: Desprecie los pequeños esfuerzos en la placa.)

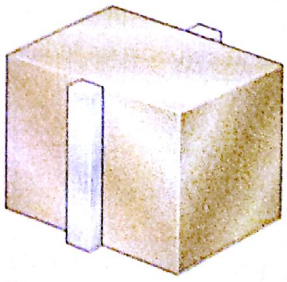


Figura P2.123

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

Este capítulo se dedicó a la introducción del concepto de *deformación*, al análisis de la relación entre el esfuerzo y la deformación en varios tipos de materiales, y a la determinación de las deformaciones de componentes estructurales bajo carga axial.

Considerando una varilla de longitud L y sección transversal uniforme y denotando con δ su deformación bajo una carga axial **P** (figura 2.1), se definió la *deformación normal* ϵ en la varilla como la *deformación por unidad de longitud* (sección 2.2):

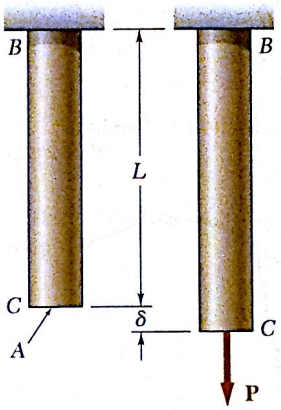
$$\epsilon = \frac{\delta}{L} \tag{2.1}$$

En el caso de una varilla con sección transversal variable, la deformación normal se define en cualquier punto dado Q considerando un pequeño elemento de varilla en Q. Denotando con Δx la longitud del elemento y con $\Delta\delta$ su deformación bajo una carga dada, se escribió

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx} \tag{2.2}$$

Graficando el esfuerzo σ contra la deformación ϵ al aumentar la carga, se obtuvo un *diagrama de esfuerzo-deformación* unitaria para el material utilizado (sección 2.3). De dicho diagrama, se pudo distinguir entre materiales *frágiles* y *dúctiles*: un elemento hecho de un material frágil se fractura sin cambio previo notable en su tasa de elongación (figura 2.11), mientras que un elemento hecho de un material dúctil *cede* después de que un esfuerzo crítico σ_Y, llamado el *esfuerzo de cedencia*, ha sido alcanzado, es decir, el elemento sufre una gran deformación antes de fracturarse, con un incremento relativamente pequeño de la carga aplicada (figura 2.9). Un ejemplo de material frágil con propiedades diferentes a tensión y a compresión es el *concreto*.

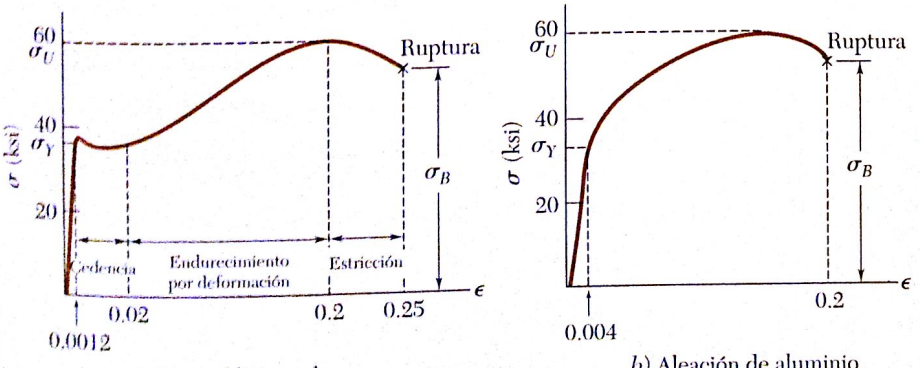
Esfuerzo normal



a) *b)*

Figura 2.1

Diagrama esfuerzo-deformación



a) Acero al bajo carbono *b)* Aleación de aluminio

Figura 2.9

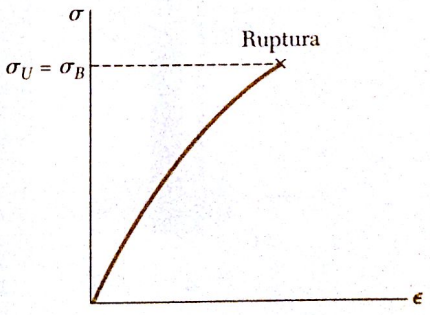


Figura 2.11

Ley de Hooke
Módulo de elasticidad

Se advirtió en la sección 2.5 que la parte inicial del diagrama esfuerzo-deformación es una línea recta. Esto significa que para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación:

$$\sigma = E\epsilon \tag{2.4}$$

Esta relación se conoce como *ley de Hooke* y el coeficiente E es el *módulo de elasticidad* del material. El máximo esfuerzo para el que la ecuación (2.4) es aplicable es el *límite de proporcionalidad* del material.

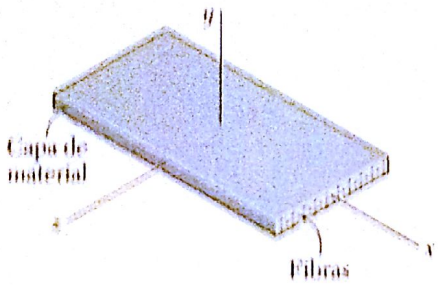


Figura 2.17

Los materiales considerados hasta este punto fueron *isotrópicos*, es decir, materiales en los que sus propiedades son independientes de la dirección. En la sección 2.5 también se consideró una clase de materiales *anisotrópicos*, es decir, materiales cuyas propiedades dependen de la dirección. Fueron los *materiales compuestos reforzados con fibras*, hechos de fibras de un material fuerte y rígido embebidas en capas de un material más débil y blando (figura 2.17). Se observó que deben utilizarse diferentes módulos de elasticidad, dependiendo de la dirección de la carga.

Deformación elástica y plástica

Si las deformaciones causadas en una probeta por la aplicación de una carga dada desaparecen cuando la carga se retira, se dice que el material se comporta *elásticamente*, y el máximo esfuerzo para el que esto ocurre se llama el *límite elástico* del material (véase sección 2.6). Si el límite elástico se excede, el esfuerzo y la deformación unitaria disminuyen de forma lineal cuando la carga se retira y la deformación unitaria no regresa a cero (figura 2.18), indicando que ha tenido lugar una *deformación permanente* o *deformación plástica* en el material.

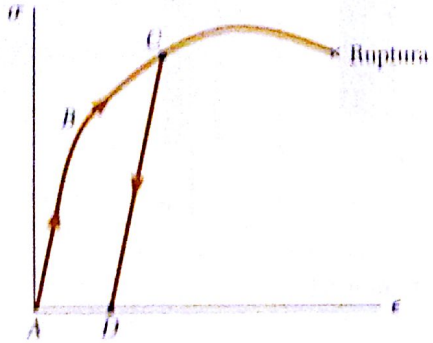


Figura 2.18

Fatiga. Límite de tolerancia

En la sección 2.7 se analizó el fenómeno de *fatiga*, que causa la falla de componentes estructurales o de máquina después de un gran número de cargas repetidas, a pesar de que los esfuerzos permanezcan dentro del rango elástico. Un ensayo estándar de fatiga consiste en determinar el número n de ciclos sucesivos de carga y descarga requeridos para causar la falla de un elemento para cualquier nivel dado de esfuerzo máximo σ, y graficar la curva σ-n resultante. El valor de σ para el que no ocurre la falla, aun para un número indefinidamente grande de ciclos, se conoce como el *límite de tolerancia* del material usado en el ensayo.

Deformación elástica bajo carga axial

La sección 2.8 se dedicó a la determinación de las deformaciones elásticas de varios tipos de componentes estructurales y de máquinas bajo varias condiciones de carga axial. Se vio que si una varilla de longitud L y sección transversal uniforme de área A se somete, en su extremo, a una carga axial centrada **P** (figura 2.22), la deformación correspondiente es

$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{2.7}$$

Si la varilla se carga en varios puntos o consta de varias partes de varias secciones transversales y posiblemente de distintos materiales, la deformación δ de la varilla debe expresarse como la suma de las deformaciones de sus partes componentes (véase ejemplo 2.01):

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} \tag{2.8}$$

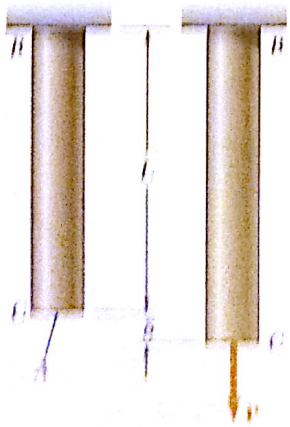


Figura 2.22

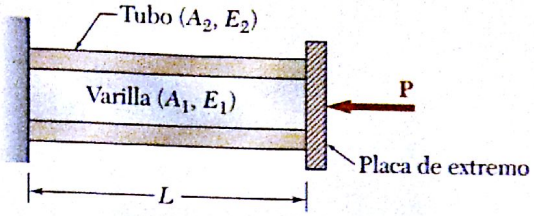


Figura 2.25*a*

Problemas estáticamente indeterminados

La sección 2.9 se dedicó a la solución de *problemas estáticamente indeterminados*, es decir, problemas en los que las reacciones y las fuerzas internas *no pueden* determinarse sólo por la estática. Las ecuaciones de equilibrio deducidas del diagrama de cuerpo libre del elemento en consideración se complementaron por relaciones que involucran deformaciones y que se obtuvieron de la geometría del problema. Las fuerzas en la varilla y en el tubo de la figura 2.25*a*, por ejemplo, se determinaron observando, por una parte, que su suma es igual a P, y por la otra, que causan deformaciones iguales en la varilla y en el tubo (véase ejemplo 2.02). De manera similar, las reacciones en los apoyos de la barra de la figura 2.26 no pudieron obtenerse del diagrama de cuerpo libre de la barra únicamente (véase ejemplo 2.03); pero sí pudieron determinarse expresando que el alargamiento total de la barra debe ser igual a cero.

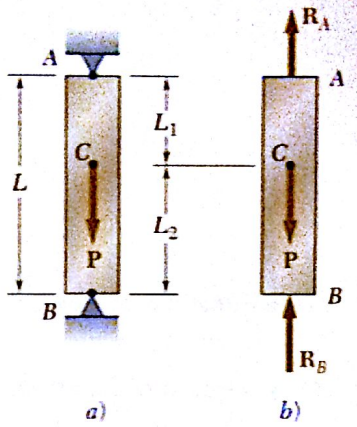


Figura 2.26

Problemas con cambios de temperatura

En la sección 2.10 se consideraron problemas que involucran *cambios de temperatura*. Primero se observó que si la temperatura en una *varilla AB sin restricciones* de largo L se incrementa en ΔT, su alargamiento es

$$\delta_T = \alpha(\Delta T)L \tag{2.21}$$

donde α es el *coeficiente de expansión térmica* del material. Se advirtió que la deformación unitaria correspondiente, llamada *deformación unitaria térmica*, es

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T \tag{2.22}$$

y que *no hay esfuerzo* asociado con esta deformación. Sin embargo, si la varilla AB es *restringida* por soportes fijos (figura 2.35*a*), se desarrollan

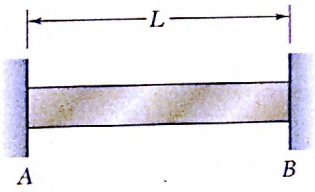


Figura 2.35*a*

esfuerzos en la varilla al aumentar la temperatura, debido a las reacciones en los soportes. Para determinar la magnitud P de las reacciones, se desprende la varilla de su soporte en B (figura 2.36) y se considera separadamente la deformación δ_T de la varilla cuando se expande libremente debido al cambio de temperatura, y la deformación δ_P generada por la fuerza **P** requerida para regresarla a su longitud original, de manera que pueda reconectarse con el soporte en B. Escribiendo que la deformación total $\delta = \delta_T + \delta_P$ es igual a cero, se obtiene una ecuación de la que puede despejarse P. En tanto que la deformación final en la varilla AB es claramente cero, éste no será, por lo general, el caso para varillas y barras que consistan en elementos de secciones transversales o materiales diferentes, ya que las deformaciones de los diversos elementos comúnmente *no* serán cero [ejemplo 2.06].

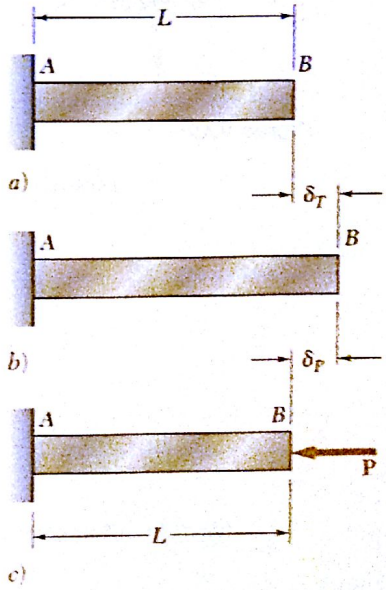
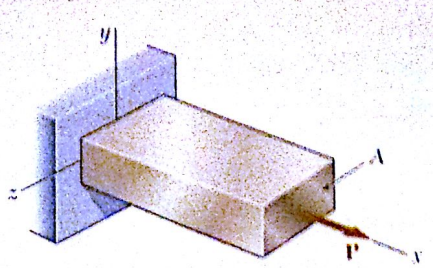


Figura 2.36



a)

Figura 2.39a

Deformación lateral. Relación de Poisson

Cuando una carga axial **P** se aplica a una barra homogénea y esbelta (figura 2.39*a*), causa una deformación, no sólo a lo largo del eje de la barra sino también en cualquier dirección transversal (véase sección 2.11). Esta deformación se conoce como *deformación lateral*, y la razón de la deformación lateral a la deformación axial se denomina *relación de Poisson* y se denota con ν (letra griega nu). Se escribe

$$\nu = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \tag{2.25}$$

Recuerde que la deformación axial de la barra es $\epsilon_x = \sigma_x/E$, y se expresó como sigue la condición de deformación bajo una carga axial en la dirección x:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \tag{2.27}$$

Carga multiaxial

Este resultado se extendió en la sección 2.12 al caso de una *carga multiaxial* que cause el estado de esfuerzos mostrado en la figura 2.42. La condición resultante de deformaciones unitarias se describió por las siguientes relaciones, que se conocen como la *ley de Hooke generalizada* para carga multiaxial.

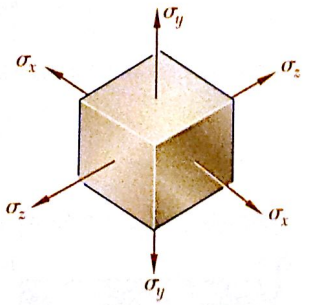


Figura 2.42

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\
\epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Si un elemento de material se somete a los esfuerzos σ_x, σ_y y σ_z, se deformará y resultará un cierto cambio de volumen (véase sección 2.13). El *cambio de volumen por volumen unitario* se conoce como la *dilatación* del material y se denota con e. Se mostró que

Dilatación

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{2.31}$$

Cuando un material se somete a una presión hidrostática p, se tiene que

$$e = -\frac{p}{k} \tag{2.34}$$

Módulo volumétrico

donde k es el *módulo volumétrico* del material:

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \tag{2.33}$$

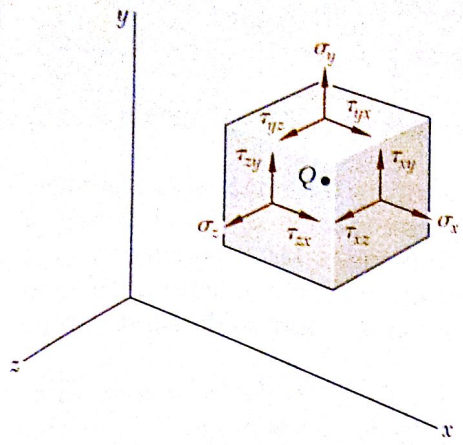


Figura 2.45

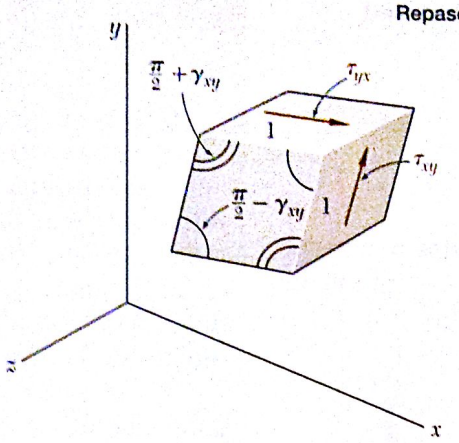


Figura 2.47

Deformación a cortante. Módulo de rigidez

Como se vio en el capítulo 1, el estado de esfuerzos en un material bajo las condiciones de carga más generales involucra esfuerzos cortantes además de esfuerzos normales (figura 2.45). Los esfuerzos cortantes tienden a deformar un elemento cúbico de material para que tome la forma de un paralelepípedo oblicuo (véase sección 2.14). Considerando, por ejemplo, los esfuerzos τ_{xy} y τ_{yx} mostrados en la figura 2.47 (que son iguales en magnitud), se advirtió que ellos hacen que los ángulos formados por las caras en las que actúan aumenten o disminuyan por un pequeño ángulo γ_{xy}; este ángulo, expresado en radianes, define la *deformación a cortante* correspondiente a las direcciones x y y. Definiendo de manera similar las deformaciones a cortante γ_{yz} y γ_{zx}, se escribieron las relaciones

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \quad (2.36, 2.37)$$

que son válidas para cualquier material isotrópico homogéneo dentro de su límite de proporcionalidad a cortante. La constante G se denomina el *módulo de rigidez* del material y las relaciones obtenidas expresan la *ley de Hooke para el esfuerzo y la deformación unitaria cortantes*. Junto con las ecuaciones (2.28), forman un grupo de ecuaciones que representan la ley de Hooke generalizada para un material isotrópico homogéneo bajo la condición más generalizada de esfuerzos.

Se estudió en la sección 2.15 que mientras que una carga axial ejercida en una barra esbelta produce sólo esfuerzos normales —tanto axiales como transversales— en un elemento de material orientado a lo largo del eje de la barra, producirá tanto esfuerzos normales como cortantes en un elemento girado 45° (figura 2.53). También se advirtió que las tres constantes E, ν y G no son independientes; satisfacen la relación

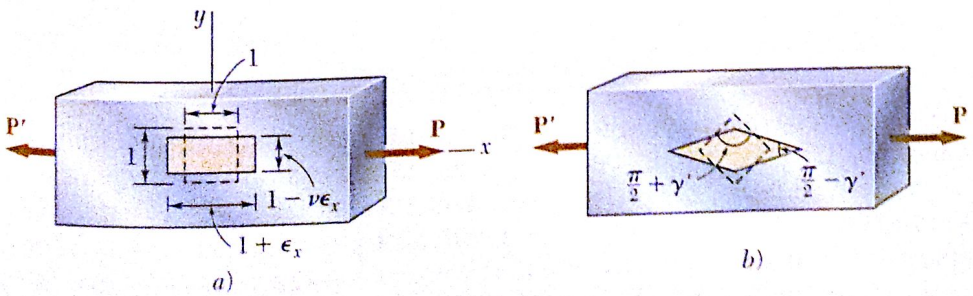


Figura 2.53

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu \tag{2.43}$$

que puede emplearse para hallar cualquiera de las tres constantes en términos de las otras dos.

Materiales compuestos reforzados con fibras

Las relaciones esfuerzo-deformación para los materiales compuestos reforzados con fibras se analizaron en una sección opcional (véase sección 2.16). Se dedujeron ecuaciones similares a las ecuaciones (2.28) y (2.36, 37) para estos materiales, pero se observó que deben utilizarse módulos de elasticidad, relaciones de Poisson y módulos de rigidez dependientes de la dirección.

Principio de Saint-Venant

En la sección 2.17 se estudió el *principio de Saint-Venant*, el cual enuncia que, excepto en la cercanía inmediata de los puntos de aplicación de las cargas, la distribución de esfuerzos en un elemento dado es independiente del modo de aplicación de las cargas. Este principio permite suponer una distribución uniforme de esfuerzos en un elemento sometido a cargas axiales concentradas, excepto cerca de los puntos de aplicación de las cargas, donde ocurrirán concentraciones de esfuerzos.

Concentraciones de esfuerzos

También ocurrirán concentraciones de esfuerzos cerca de las discontinuidades en elementos estructurales, como agujeros o cambios repentinos en la sección transversal (véase sección 2.18). La razón del máximo valor del esfuerzo que ocurre cerca de la discontinuidad sobre el esfuerzo promedio calculado en la sección crítica se conoce como el *factor de concentración de esfuerzos* de la discontinuidad y se denota con K:

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \tag{2.48}$$

Los valores de K para agujeros circulares y filetes en barras planas fueron dados en la figura 2.64 en la página 108.

Deformaciones plásticas

En la sección 2.19 se trataron las *deformaciones plásticas* que ocurren en elementos estructurales hechos de un material dúctil cuando los esfuerzos en alguna parte del elemento exceden la resistencia a la cedencia del material. El análisis se realizó para un *material elastoplástico* idealizado, caracterizado por el diagrama esfuerzo-deformación como el de la figura 2.65 (véanse ejemplos 2.13, 2.14 y 2.15). Finalmente, en la sección

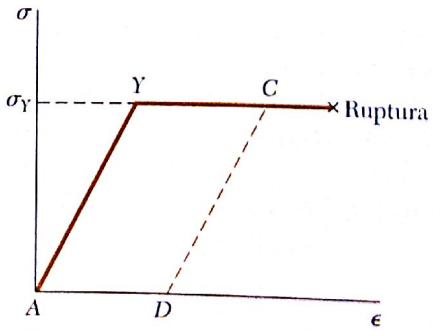


Figura 2.65

2.20, se observó que cuando una estructura indeterminada sufre deformaciones plásticas, los esfuerzos, en general, no regresan a cero después de que la carga se retira. Los esfuerzos remanentes en las distintas partes de la estructura se denominan *esfuerzos residuales* y se calculan sumando los esfuerzos máximos alcanzados durante la fase de carga y los esfuerzos inversos correspondientes a la fase de descarga (véase ejemplo 2.16).

PROBLEMAS DE REPASO

2.124 La varilla de aluminio ABC ($E = 10.1 \times 10^6$ psi) que consiste en dos porciones cilíndricas AB y BC, será reemplazada con una varilla cilíndrica de acero DE ($E = 29 \times 10^6$ psi) de la misma longitud total. Determine el diámetro mínimo requerido d para la varilla de acero si su deformación vertical no debe exceder la deformación de la varilla de aluminio bajo la misma carga y si el esfuerzo permisible en la varilla de acero no debe exceder 24 ksi.

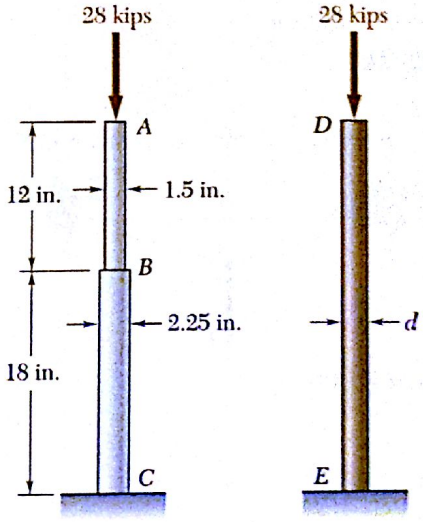


Figura P2.124

2.125 La tira de latón AB se encuentra unida a un soporte fijo en A y descansa sobre un soporte rugoso en B. Si se sabe que el coeficiente de fricción entre la tira y el soporte en B es de 0.60, determine el descenso en temperatura para el cual sería inminente un deslizamiento.

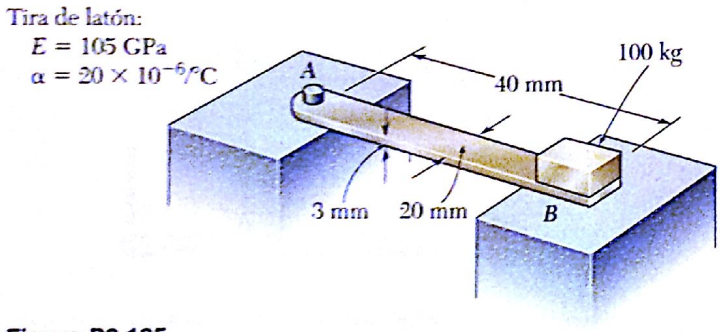


Figura P2.125

2.126 Dos varillas cilíndricas están unidas en B y son sometidas a la carga que se muestra en la figura. La varilla AB está hecha de acero ($E = 29 \times 10^6$ psi) y la varilla BC de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi). Determine *a*) la deformación total de la varilla compuesta ABC, *b*) la deflexión del punto B.

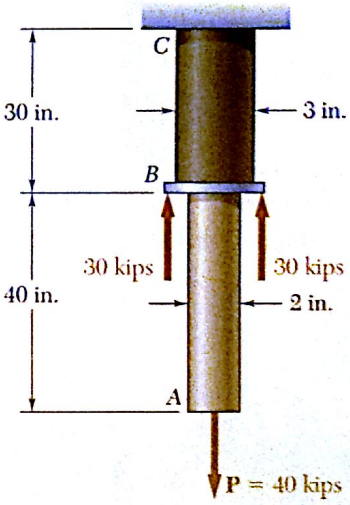


Figura *P2.126*

2.127 El eslabón BD está hecho de latón ($E = 15 \times 10^6$ psi) y tiene un área de sección transversal de 0.40 in.^{2} El eslabón CE es de aluminio ($E = 10.4 \times 10^6$ psi) y tiene un área de sección transversal de 0.50 in.^{2} Determine la fuerza máxima **P** que puede aplicarse verticalmente en el punto A si la deflexión de A no debe exceder 0.014 in.

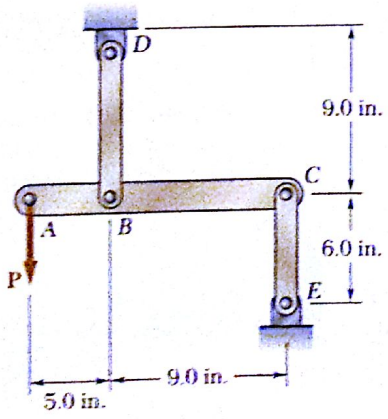


Figura P2.127

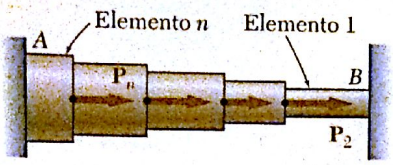


Figura P2.C2

2.C2 La varilla horizontal AB con ambos extremos fijos tiene n elementos homogéneos de sección transversal uniforme. La longitud del elemento i se denota mediante L_i, su área de sección transversal con A_i, su módulo de elasticidad con E_i, y la carga aplicada a su extremo por $\mathbf{P}_i$; la magnitud P_i de esta carga se supone positiva si $\mathbf{P}_i$ va hacia la derecha; de lo contrario, se considera negativa. (Advierta que $P_1 = 0$.) *a*) Escriba un programa para computadora que pueda emplearse para determinar las reacciones en A y B, el esfuerzo normal promedio en cada elemento, y la deformación de cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.41 y 2.42.

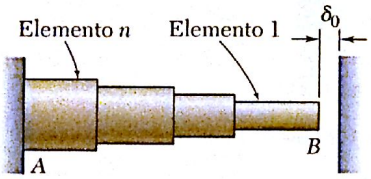


Figura P2.C3

2.C3 La varilla AB tiene n elementos, cada uno de los cuales es homogéneo y de sección transversal uniforme. El extremo A se encuentra fijo, mientras que existe una separación inicial δ_0 entre el extremo B y la superficie fija vertical situada a la derecha. La longitud del elemento i es L_i, su área de sección transversal A_i, su módulo de elasticidad se denota mediante E_i, y su coeficiente de expansión térmica es α_i. Después de que la temperatura de la varilla se ha aumentado en ΔT, la separación en B se cierra y las superficies verticales ejercen fuerzas iguales y opuestas sobre la varilla. *a*) Escriba un programa para computadora que pueda usarse para determinar la magnitud de las reacciones en A y B, el esfuerzo normal y la deformación en cada elemento. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.51, 2.59 y 2.60.

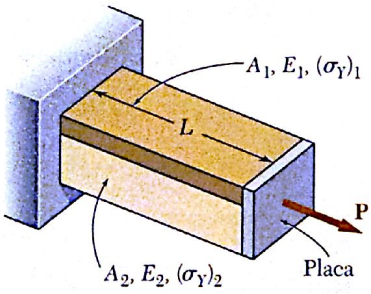


Figura P2.C4

2.C4 La barra AB tiene longitud L y está hecha a partir de dos materiales diferentes con área de sección transversal, módulo de elasticidad y resistencia a la fluencia dados. La barra se somete, como se muestra en la figura, a una carga $\mathbf{P}$ que se incrementa gradualmente desde cero hasta que la deformación alcanza un valor máximo δ_m y entonces se reduce a cero. *a*) Escriba un programa de cómputo que, para cada uno de los 25 valores de δ_m uniformemente espaciados en un rango que se extienda desde 0 hasta un valor igual al 120% de la deformación que cause que ambos materiales cedan, pueda emplearse para determinar el valor máximo P_m de la carga, el esfuerzo normal máximo en cada material, la deformación permanente δ_p de la barra, y el esfuerzo residual en cada material. *b*) Utilice dicho programa para resolver los problemas 2.111 y 2.112.

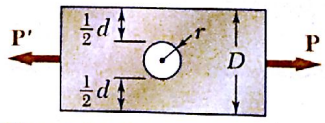


Figura P2.C5

2.C5 La placa tiene un orificio central que la atraviesa de lado a lado. El factor de concentración de esfuerzos para una barra plana bajo carga axial y con un agujero central puede expresarse como:

$$K = 3.00 - 3.13\left(\frac{2r}{D}\right) + 3.66\left(\frac{2r}{D}\right)^2 - 1.53\left(\frac{2r}{D}\right)^3$$

donde r es el radio del agujero y D el ancho de la barra. Escriba un programa de cómputo que pueda utilizarse para determinar la carga permisible $\mathbf{P}$ para valores dados de r, D, el espesor t de la barra y el esfuerzo permisible σ_{perm} del material. Si se sabe que $t = \frac{1}{4}$ in., $D = 3.0$ in. y $\sigma_{perm} = 16$ ksi, determine la carga permisible $\mathbf{P}$ para valores de r desde 0.125 in. hasta 0.75 in., con incrementos de 0.125 in.

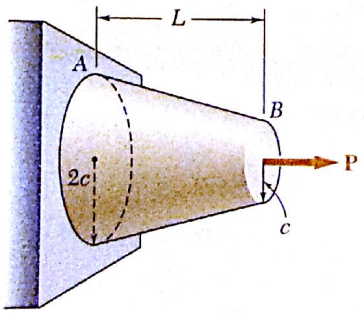


Figura P2.C6

2.C6 Un cono sólido truncado es sometido a una carga axial $\mathbf{P}$ como se muestra en la figura. El alargamiento exacto del cono es $(PL)/(2\pi c^2 E)$. Reemplazando el cono mediante n cilindros circulares de igual espesor, escriba un programa para computadora que pueda usarse para calcular el alargamiento del cono truncado. ¿Cuál es el error porcentual de la respuesta obtenida con el programa si se usa *a*) $n = 6$, *b*) $n = 12$, *c*) $n = 60$?